14 ª Aula 2004.10.15 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

14.1 Cálculo de resíduos em pólos de ordem m

Se f tem um pólo de ordem $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} > \mathbf{0}$) no ponto z_0 então (para z tal que $0 \neq |z - z_0| < R$; para certo $R > 0$)

$$f(z) = \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

com $a_{-\mathbf{m}} \neq 0$. Considere-se então a função

$$g(z) = f(z)(z - z_0)^{\mathbf{m}}.$$

$$g(z) = f(z)(z - z_0)^{\mathbf{m}}.$$

Vem

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+\mathbf{m}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-\mathbf{m}} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{a}_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{a}_n = a_{n-\mathbf{m}}$. A função $g(z)$ é portanto analítica em z_0 se definirmos $g(z_0) = \widetilde{a}_0 = a_{-\mathbf{m}} = \lim_{z \to z_0} g(z)$. Temos então

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_n &= \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dz^n}(z_0) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^n}{dz^n} \left(f(z)(z - z_0)^{\mathbf{m}} \right) \end{aligned}$$

Como o coeficiente $\widetilde{a}_{\mathbf{m-1}} = a_{-1}$ é o resíduo da função $f(z)$ em z_0, obtivemos assim a seguinte fórmula para o cálculo do resíduo num pólo de ordem $\mathbf{m}$ [1]:

Se $z = z_0$ é um pólo de ordem $\mathbf{m}$ da função $f(z)$, então

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(\mathbf{m-1})!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{\mathbf{m-1}}}{dz^{\mathbf{m-1}}} \left(f(z)(z - z_0)^{\mathbf{m}} \right). \tag{14.1}$$

[1] Uma vez que não se usou que $a_{-\mathbf{m}} \neq 0$, a fórmula é ainda válida se tivermos um pólo de ordem inferior a $\mathbf{m}$.

Exemplo 14.1 *Vamos calcular o seguinte integral sobre a circunferência de raio 3π centrada na origem percorrida no sentido positivo:*

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{1}{z\left(e^z-1\right)} dz.$$

Considere-se a função $f(z) = \dfrac{1}{z\left(e^z-1\right)}$. *Como* $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$ *concluímos que* $e^z - 1$ *tem um zero simples em* $z = 0$; *então* $z\left(e^z-1\right)$ *tem um zero de segunda ordem em* $z = 0$, *pelo que* $f(z)$ *tem um pólo de segunda ordem no mesmo ponto e*

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z\left(e^z-1\right)} z^2\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{e^z-1} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{\left(e^z-1\right)^2} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2\left(e^z-1\right)e^z} \\
&= \frac{-1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{z}{\left(e^z-1\right)} \\
&= \frac{-1}{2}.
\end{aligned}$$

Note-e ainda que dentro da região delimitada pela circunferência $|z| = 3\pi$ *existem mais duas singularidades isoladas de* $f(z)$, *são elas* $z = 2\pi i$ *e* $z = -2\pi i$. *No próximo cálculo vamos verificar que estas singularidades são pólos simples (de acordo com a Proposição* ***13.1****) e ao mesmo tempo calculamos os seus resíduos por aplicação da fórmula (14.1). Temos então*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\pm 2\pi i} (z \mp 2\pi i) f(z) &= \lim_{z\to\pm 2\pi i} \frac{(z \mp 2\pi i)}{z\left(e^z-1\right)} \\
&= \frac{1}{\pm 2\pi i} \lim_{z\to\pm 2\pi i} \frac{(z \mp 2\pi i)}{\left(e^z-1\right)} \\
&= \pm\frac{1}{2\pi i} \lim_{z\to\pm 2\pi i} \frac{1}{e^z} \\
&= \pm\frac{1}{2\pi i} \in \mathbb{C}\setminus\{0\},
\end{aligned}$$

pelo que estas singularidades são pólos simples e

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}.$$

Finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=3\pi} \frac{1}{z\left(e^z-1\right)} dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2\pi i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2\pi i} f(z)\right) \\
&= -\pi i.
\end{aligned}$$

14.2 Aplicações do Teorema dos Resíduos Integrais de funções trigonométricas

Considere-se o seguinte integral

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\, d\theta \tag{14.2}$$

onde f é uma função complexa de variável complexa analítica sobre a circunferência unitária centrada na origem. Notando que $z = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da circunferência $|z| = 1$, percorrida no sentido positivo, podemos relacionar o integral de variável real (14.2) com o um integral caminho complexo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{ie^{i\theta}} ie^{i\theta}\, d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz}\, dz,\end{aligned}$$

onde a curva $|z| = 1$ é considerada com o sentido positivo.

Neste contexto convem referir que, com $z = e^{i\theta}$, se tem

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2i}.\end{aligned}$$

Exemplo 14.2

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos(\theta) - 5}\, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2\left(z + z^{-1}\right) - 5} \frac{1}{iz}\, dz = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2}\, dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}\, dz = \frac{1}{2i} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2i} 2\pi i \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 2\right)} = \frac{-2\pi}{3}\end{aligned}$$

Exemplo 14.3

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4\operatorname{sen}(\theta) - 5}\, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{4\frac{z - z^{-1}}{2i} - 5} \frac{1}{iz}\, dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - i5z - 2}\, dz \\ &= \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - i2)\left(z - \frac{i}{2}\right)}\, dz = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{\left(\frac{i}{2} - 2i\right)} \\ &= \frac{-2\pi}{3}\end{aligned}$$

O resultado acima exposto pode ser aplicado a uma miríade de outras situações semelhantes. É o que se pretende ilustrar nos seguintes exemplos.

Exemplo 14.4

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos(3\theta)\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\oint_{|z|=1} \frac{z^3+z^{-3}}{iz}\, dz = \frac{1}{4i}\left(\oint_{|z|=1} z^2\, dz + \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^4}\, dz\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por aplicação trivial do Teorema dos Resíduos.

Exemplo 14.5 *Fazendo a substituição $t=\pi\theta$*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f\left(e^{i\pi\theta}\right) d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz}\, dz.
\end{aligned}$$

Exemplo 14.6 *Vamos calcular o integral*

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $t=\frac{\pi x}{2}$,

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos(t)} dt.$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx &= \frac{2}{\pi}\oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\, \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{4}{\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{4z+z^2+1}\, dz \\
&= \frac{4}{\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+2)^2-3}\, dz \\
&= \frac{4}{\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)}\, dz.
\end{aligned}$$

Atendendo que $\left|-2-\sqrt{3}\right| = 2+\sqrt{3} > 1$ e $\left|-2+\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3} < 1$, vem pelo Teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx &= \frac{4}{\pi i}2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)} \\
&= 8 \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{1}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$