15 ª Aula 2004.10.18 $\boxed{\textbf{AMIV}\ \text{LEAN, LEC}}$ Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

15.1 Aplicações do Teorema dos Resíduos Integrais de funções racionais

Considerem-se os polinómios P e Q de grau m e n respectivamente. Iremos supor que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $n \geqslant m+2$, o que garante a existência do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

Vamos expor um raciocínio clássico que permite calcular este integral através do teorema dos resíduos.

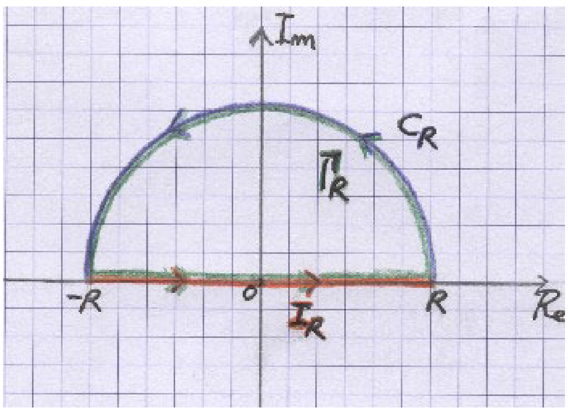
Comecemos por transformar o integral de uma função real de variável real num integral de caminho complexo:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\end{aligned}$$

onde I_R é o segmento recta sobre o eixo real que liga os pontos $z=-R$ com $z=R$. Vamos agora transformar este integral num integral sobre um caminho fechado para que se possa aplicar o teorema dos resíduos:

$$\int_{I_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz - \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

onde C_R é a semicircunferência de raio R e centro na origem, situada no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ (orientada do ponto $z=R$ para o ponto $z=-R$); e Γ_R é a concatenação das curvas orientadas I_R e C_R (sendo portanto uma curva fechada simples orientada no sentido positivo).



Note-se que, pelo teorema dos resíduos, $\oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$ tem o mesmo valor para qualquer R suficientemente grande, i. e.

$$\forall R, \widetilde{R} > R_0 \qquad \oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \oint_{\Gamma_{\widetilde{R}}} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

onde R_0 é o maior dos módulos dos zeros de $Q(z)$ ($R_0 = \max\{|z| : Q(z) = 0\}$).

A possibilidade de continuar o cálculo utilizando o teorema dos resíduos baseia-se na seguinte proposição (Proposição 15.1), obtendo-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

onde R é um real positivo qualquer tal que $R > R_0$.

Proposição 15.1 *Seja $P(z)$ um polinómio de grau m, $Q(z)$ um polinómio de grau n, $n \geqslant m+2$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \text{ e } \operatorname{Im} z > 0\}$. Então*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$$

Demonstração. *Facilmente se reconhece que o seguinte limite existe*

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-m} = w \in \mathbb{C}.$$

Pelo que existe M (por exemplo $M = 1 + |w|$), para o qual se pode afirmar que existe $\widetilde{R_0}$ tal que

$$|z| > \widetilde{R_0} \Rightarrow \left| \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-m} \right| < M.$$

Feita a escolha destes números M e $\widetilde{R_0}$, temos, para $R > \widetilde{R_0}$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \right| &\leqslant \int_{C_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| |dz| \\
&\leqslant \int_{C_R} \frac{M}{|z|^{n-m}} |dz| = \\
&\leqslant \frac{M}{R^{n-m}} \int_{C_R} |dz| = \\
&\leqslant \frac{M\pi}{R^{n-m-1}}.
\end{aligned}$$

Como $n - m - 1 \geqslant 1$, obtemos

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \right| \leqslant \lim_{R\to+\infty} \frac{M\pi}{R^{n-m-1}} = 0$$

■

Exemplo 15.1 *Com as notações acima descritas, temos*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz \right),
\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições da Proposição 15.1 ($m = 0 \leqslant n-2 = 4-2$), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx &= \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{1+z^4}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} \right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+z^4} + \lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{3\pi}{4}}}{1+z^4} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} + \frac{1}{4\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2\sqrt{2}} (-1-i+1-i) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo 15.2 *Com as notações acima descritas, temos*

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{z^2}{1+z^6}\,dz \\
&= \frac{1}{2} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{1+z^6}\,dz - \int_{C_R} \frac{z^2}{1+z^6}\,dz \right),
\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições da Proposição 15.1 ($m = 2 \leqslant n-2 = 6-2$), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_2} \frac{z^2}{1+z^6}\,dz \\
&= \pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z^2}{1+z^6} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{2}}} \frac{z^2}{1+z^6} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{5\pi}{6}}} \frac{z^2}{1+z^6} \right).
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z^2}{1+z^6} &= \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z^2\left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{1+z^6} \\
&= \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{\left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{1+z^6} \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}} \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{6e^{i\frac{5\pi}{6}}} \\
&= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{6} \\
&= \frac{-i}{6}.
\end{aligned}
$$

Procedendo de forma análoga, vem

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx &= \pi i \left(\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5} + \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^5} + \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 \frac{1}{6\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^5} \right) \\
&= \pi i \left(\frac{1}{6} e^{i\left(\frac{2\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)} + \frac{1}{6} e^{i\left(\frac{2\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}\right)} + \frac{1}{6} e^{i\left(\frac{10\pi}{6}-\frac{25\pi}{6}\right)} \right) \\
&= \pi i \left(\frac{-i}{6} + \frac{i}{6} - \frac{i}{6} \right) \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$