16 ª Aula 2004.10.20 **AMIV** LEAN, LEC **Apontamentos**

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

16.1 Aplicações do Teorema dos Resíduos - Lema de Jordan

De forma semelhante à Proposição **15.1**, o seguinte lema permite o cálculo de certos integrais de variável real.

Lema 16.1 (Lema de Jordan) *Se $f(z)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, excepto possivelmente num número finito de singularidades isoladas, é tal que*

$$\lim_{R\to\infty} \max_{z\in C_R} |f(z)| = 0,$$

e se $\alpha > 0$, então

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 0,$$

onde $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \quad e \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Observação 16.1 *Como $\alpha > 0$ e $\operatorname{Im} z > 0$, temos $|e^{i\alpha z}| = |e^{ix}e^{-\alpha y}| = e^{-\alpha y} < 1$, (com $z = x + iy$) é este pequeno factor que permite a conclusão do lema.*

Demonstração. *Temos*

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz \right| \leqslant \int_{C_R} |f(z)| \left|e^{i\alpha z}\right| |dz| \leqslant \max_{z\in C_R} |f(z)| \int_{C_R} e^{-\alpha \operatorname{Im} z} \, |dz| .$$

Como por hipótese $\max_{z\in C_R} |f(z)|$ converge para zero, basta agora verificar que o último integral é limitado:

$$\int_{C_R} e^{-\alpha \operatorname{Im} z} \, |dz| = R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \operatorname{sen}\theta}\, d\theta \leqslant 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha 2R\theta}{\pi}}\, d\theta,$$

porque $\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \operatorname{sen}\theta$ se $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Portanto

$$\int_{C_R} e^{-\alpha \operatorname{Im} z} \, |dz| \leqslant 2R \left[\frac{-\pi e^{-\frac{\alpha 2R\theta}{\pi}}}{\alpha 2R} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \leqslant \frac{\pi}{\alpha}.$$

■

Exemplo 16.1 *Seja C_R a semicircunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R \quad e \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ (orientada do ponto $z = R$ para o ponto $z = -R$); $I_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R \quad e \quad \operatorname{Im} z = 0\}$ o segmento de recta orientado de $z = -R$ e $z = R$; e Γ_R a concatenação das curvas orientadas I_R e C_R (sendo portanto uma curva fechada simples orientada no sentido positivo). Temos*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \operatorname{Re} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz \right),\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições do Lema de Jordan (Lema 16.1), uma vez que

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{1+z^2} = 0 \quad e \quad e^{iz} = e^{i\alpha z} \textit{ com } \alpha = 1 > 0,$$

obtemos

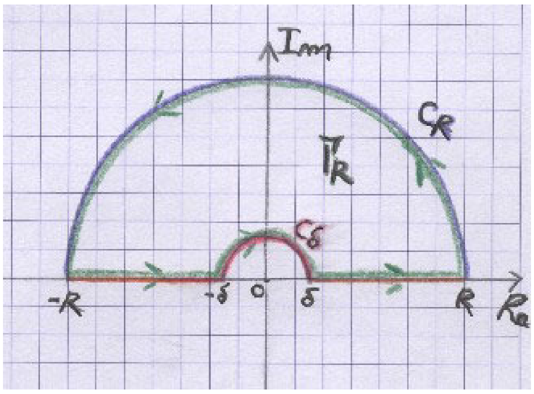
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \oint_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = 2i\frac{e^{i(i)}}{i+i} = \frac{\pi}{e}$$

Enquanto em exemplos anteriores aplicamos o Teorema dos resíduos para calcular integrais que poderiam ser calculados por primitivação elementar, neste último exemplo conseguimos calcular um integral de uma função que não tem primitiva elementar. No próximo exemplo esta situação repete-se.

Exemplo 16.2

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \lim_{\delta\to0^+} \left(\int_{\delta}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \int_{-R}^{-\delta} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right) \\ &= \lim_{R\to+\infty} \lim_{\delta\to0^+} \operatorname{Im} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \right)\end{aligned}$$

onde C_δ *é a curva* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta \quad e \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *percorrida do ponto* δ *para o ponto* $-\delta$ *e* Γ_R *é a concatenação das curvas* C_R *e* $-C_\delta$ *com os segmentos de recta definidos por* $\operatorname{Im} z = 0$ *e* $\delta \leqslant |\operatorname{Re} z| \leqslant R$.



Pelo Lema de Jordan (Lema 16.1) temos

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$$

e pelo Teorema de Cauchy ($z = 0$ *está no exterior da região delimitada pela curva* Γ_R*)*

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

Por outro lado (usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue)

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0^+} \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\, dz &= \lim_{\delta\to0^+} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\delta e^{i\theta}}}{\delta e^{i\theta}}\, i\delta e^{i\theta} d\theta = i \lim_{\delta\to0^+} \int_0^{\pi} e^{i\delta e^{i\theta}}\, d\theta = i \int_0^{\pi} d\theta \\ &= i\pi.\end{aligned}$$

Pelo que

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \operatorname{Im}(i\pi) = \pi.$$