17 ª Aula 2004.10.22 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

17.1 Definições de polinómio e fracção racional

Comecemos por adoptar uma definição de polinómio de grau n.

Definição 17.1 *Uma função $f(z)$ analítica em $\mathbb{C}$ é um* ***polinómio de grau inferior a*** *n (um inteiro não negativo) sse a sua derivada de ordem n é a função nula, i. e. $f^{(n)}(z) \equiv 0$. Um* ***polinómio de grau*** *n é um polinómio de grau inferior a $n+1$ que não é de grau inferior a n.*

Note-se que de acordo com esta definição qualquer constante não nula é um polinómio de grau zero. A seguinte proposição garante que esta definição está de acordo com o conceito formal de polinómio.

Proposição 17.1 *Dado qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z)$ é um polinómio de grau n sse admite uma representação da forma*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k, \quad \text{com } a_n \neq 0,$$

onde $a_k \in \mathbb{C}$, para $k = 0, 1...n$.

Demonstração. Se $P(z)$ é um polinómio de grau n então $P^{(n+1)}(z) \equiv 0$, portanto a sua derivada de ordem n é constante e não nula; seja essa constante diferente de zero $P^{(n)}(z) \equiv \frac{a_n}{n!}$. Então, de acordo com o Teorema **11.4**, temos

$$P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$$

onde $a_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$, o que termina a demonstração. Reciprocamente, se $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$, com $a_n \neq 0$, então derivando n vezes obtemos $P^{(n)}(z) \equiv n! a_n \neq 0$; e derivando mais uma vez $P^{(n+1)}(z) \equiv 0$. Verifica portanto a definição adoptada de polinómio. ■

Observação 17.1 *Note-se que os coeficientes a_k ($k = 0, 1, \ldots n-1$) dependem da escolha de z_0. Contudo o coeficiente a_n (com n o grau do polinómio) não depende desta escolha, tendo-se*

$$a_n = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{P(z)}{z^n}.$$

Definição 17.2 *Uma função $f(z)$ é uma* ***função racional*** *se é o quociente de dois polinómios; i. e. $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ com $P(z)$ e $Q(z)$ polinómios. Uma função racional diz-se* ***própria*** *se o grau do polinómio no numerador for inferior ao grau do polinómio no denominador; i. e. grau de $P(z)$ (estritamente) menor que o grau de $Q(z)$.*

17.2 Teorema de Liouville

Teorema 17.2 (Teorema de Liouville) *Se $f(z)$ é uma função limitada e analítica em $\mathbb{C}$, então $f(z)$ é uma função constante.*

Demonstração. Sendo $f(z)$ é uma função limitada, seja M tal que $|f(z)| \leqslant M$. Dado $z \in \mathbb{C}$ considere-se a circunferência C de centro em z e raio R, percorrida no sentido positivo. Então, de acordo com as fórmulas integrais de Cauchy (Teorema **9.1**),

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{M}{R^2} |d\xi| = \frac{M}{2\pi R^2} \oint_C |d\xi| = \\ &\leqslant \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Fazendo R arbitrariamente grande, vem $|f'(z)| = 0$. Como o ponto z é arbitrário concluímos que a derivada de $f(z)$ é nula em todos os pontos, ou seja, $f(z)$ é constante. ∎

17.3 Factorização de polinómios

A próxima proposição afirma que qualquer polinómio de grau não nulo tem pelo menos uma raiz.

Proposição 17.3 *Se $P(z)$ é um polinómio de grau positivo, então tem um zero.*

Demonstração. Se por absurdo supusermos que $P(z)$ nunca se anula, então a função $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ seria analítica em $\mathbb{C}$. Por outro lado, facilmente se verifica (porque $P(z)$ tem grau positivo) que $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$; pelo que existe L tal que para $|z| > L$ se tem $\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leqslant 1$. Podemos então concluir, pelo[1] Teorema de Liouville, que $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ é constante, contrariamente à hipótese de $P(z)$ ser um polinómio de grau positivo. ∎

Proposição 17.4 *Se $P(z)$ é um polinómio de grau n e z_0 um zero deste polinómio, então $\frac{P(z)}{z - z_0}$ é um polinómio de grau $n-1$*

Demonstração. Temos $P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k (z - z_0)^k$, com $a_n \neq 0$.

Pelo que $\frac{P(z)}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{n} a_k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (z - z_0)^k$ com $a_n \neq 0$. ∎

[1] Sendo $f(z)$ analítica, podemos concluir que $|f(z)|$ é uma função (com valores reais) contínua, e portanto, tem um máximo no circulo $|z| \leqslant L$; i.e. $|z| \leqslant L \Rightarrow |f(z)| \leqslant M$. Então $|f(z)|$ é uma função limitada, ou seja $f(z)$ é uma função limitada; i.e. para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se $|f(z)| \leqslant \max\{M, 1\}$.

Teorema 17.5 *Seja $P(z)$ é um polinómio de grau n (não nulo). Então*

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_j)^{m_j}$$

onde $z_1, z_2 \dots z_j$ são os zeros de $P(z)$, $a_n = \frac{P^{(n)}(z)}{n!}$ é uma constante complexa e $m_1, m_2 \dots m_j$ são inteiros positivos (a ordem dos zeros[2]) tais que

$$m_1 + m_2 + \dots + m_j = n.$$

Demonstração. Nesta demonstração vamos usar sistematicamente a o facto de qualquer polinómio de grau não nulo ter pelo menos um zero, de acordo com a Proposição 17.3. Seja z_1 um zero de $P(z)$ e m_1 a sua ordem. Então

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=m_1}^{n} \frac{P^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^k = (z - z_1)^{m_1} \sum_{k=0}^{n-m_1} \frac{P^{(k+m_1)}(z_1)}{(k+m_1)!} (z - z_1)^k \\ &= (z - z_1)^{m_1} P_1(z), \end{aligned}$$

onde $P_1(z)$ é um polinómio de grau $n - m_1$. Se $n = m_1$ a demonstração está completa; caso contrário, sendo z_2 um zero de ordem m_2 do polinómio $P_1(z)$, podemos repetir o processo obtendo-se

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \sum_{k=m_2}^{n-m_1} \frac{P_1^{(k)}(z_2)}{k!} (z - z_2)^k = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} P_2(z)$$

onde $P_2(z)$ é um polinómio de grau $n - m_1 - m_2$. Se $n = m_1 + m_2$ a demonstração está completa; caso contrário podemos continuar o procedimento anterior. Este termina numa iteração j (num máximo de n iterações) quando $n = m_1 + m_2 + \dots + m_j$, obtendo-se

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_j)^{m_j} P_j$$

onde P_j é um polinómio de grau $n - m_1 - m_2 - \dots - m_j = 0$, ou seja uma constante que pode ser determinada por

$$P_j = \frac{P^{(n)}}{n!} = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{P(z)}{z^n} = \frac{P(z)}{(z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_j)^{m_j}}.$$

■

Como corolário imediato desta factorização temos a seguinte proposição:

Proposição 17.6 *Se $P(z)$ é um polinómio de grau m e $Q(z)$ é um polinómio de grau n, então $P(z)\,Q(z)$ é um polinómio de grau $m + n$.*

[2] Os valores $z_1, z_2 \dots z_j$ são também designados por raízes $P(z)$ e $m_1, m_2 \dots m_j$ as respectivas multiplicidades.

17.4 Decomposição em fracções simples

Teorema 17.7 (Decomposição em fracções simples) *Seja $Q(z)$ um polinómio de grau n (não nulo), $z_1, z_2 \ldots z_j$ os zeros (distintos) deste polinómio e $m_1, m_2 \ldots m_j$ as respectivas ordens. Considere-se uma função racional própria $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ também um polinómio (de grau inferior a n). Então*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{b_{k,s}}{(z-z_k)^s},$$

onde[3]

$$b_{k,s} = \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(f(z) (z-z_k)^{s-1} \right).$$

Demonstração. De acordo com as hipóteses, $f(z)$ tem singularidades nos pontos $z_1, z_2 \ldots z_j$ que são pólos de ordem inferior a $m_1, m_2 \ldots m_j$ respectivamente[4]. Então de acordo com o Teorema **12.1** temos

$$f(z) = \sum_{s=-m_1}^{+\infty} b_{1,-s} (z-z_1)^s,$$

com

$$b_{1,-s} = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^{s+1}} dz = \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) (z-z_1)^{-s-1}.$$

Então, definindo

$$g_1(z) \equiv f(z) - \sum_{s=-m_1}^{-1} b_{1,-s} (z-z_1)^s = f(z) - \sum_{s=1}^{m_1} \frac{b_{1,s}}{(z-z_1)^s},$$

temos que

$$g_1(z) = \sum_{s=0}^{+\infty} b_{1,-s} (z-z_1)^s, \quad \text{(numa vizinhança de } z_1\text{)}$$

pelo que esta é uma função com singularidades apenas nos pontos $z_2 \ldots z_j$. Repetindo temos

$$g_1(z) = \sum_{s=-m_2}^{+\infty} b_{2,-s} (z-z_2)^s,$$

com

$$b_{2,-s} = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_2)^{s+1}} dz = \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) (z-z_2)^{-s-1}.$$

[3] Ou de acordo com a fórmula (**13.1**)

$$b_{k,s} = \frac{1}{m_k - s} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{m_k - s}}{dz^{m_k - s}} \left(f(z) (z-z_k)^{m_k} \right).$$

[4] Podem não ter exactamente esta ordem porque os mesmos pontos podem ser zeros também do polinómio $P(z)$.

Então, definindo

$$\begin{aligned} g_2(z) &\equiv g_1(z) - \sum_{s=-m_2}^{-1} b_{2,-s}(z-z_1)^s = g_1(z) - \sum_{s=1}^{m_2} \frac{b_{2,s}}{(z-z_2)^s} \\ &= f(z) - \sum_{s=1}^{m_1} \frac{b_{1,s}}{(z-z_1)^s} - \sum_{s=1}^{m_2} \frac{b_{2,s}}{(z-z_2)^s}, \end{aligned}$$

temos que

$$g_2(z) = \sum_{s=0}^{+\infty} b_{2,-s}(z-z_2)^s, \quad \text{(numa vizinhança de } z_2\text{)}$$

pelo que esta é uma função com singularidades apenas nos pontos $z_3 \ldots z_j$. Repetindo este procedimento j vezes obtemos que

$$\begin{aligned} g_j(z) &\equiv g_{j-1}(z) - \sum_{s=-m_j}^{-1} b_{1,-s}(z-z_j)^s = g_{j-1}(z) - \sum_{s=1}^{m_j} \frac{b_{j,s}}{(z-z_j)^s} \\ &= f(z) - \sum_{k=1}^{j}\sum_{s=1}^{m_k} \frac{b_{k,s}}{(z-z_k)^s} \end{aligned}$$

é uma função analítica em $\mathbb{C}$. Como $\lim_{|z|\to\infty} g_j(z) = 0$ (porque $f(z)$ é própria) obtemos pelo Teorema de Liouville que $g_j(z)$ é constante; e como $\lim_{|z|\to\infty} g_j(z) = 0$ vem $g_j(z) \equiv 0$ como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 17.1 *Considere-se a função* $\frac{z+1}{(z-1)^3 z^2}$. *Temos então a decomposição*

$$\frac{z+1}{(z-1)^3 z^2} = \frac{b_{1,1}}{z-1} + \frac{b_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{b_{1,3}}{(z-1)^3} + \frac{b_{2,1}}{z} + \frac{b_{2,2}}{z^2},$$

com

$$b_{1,1} = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{(z-1)^3 z^2} = \lim_{z\to1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z+1}{z^2} = \frac{-1}{2}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\frac{z+2}{z^3} = \frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{2z+6}{z^4} = 4,$$

$$b_{1,2} = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{(z-1)^3 z^2}(z-1) = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{(z-1)^2 z^2} = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\frac{z+1}{z^2} = -\lim_{z\to1}\frac{z+2}{z^3} = -3,$$

$$b_{1,3} = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{(z-1)^3 z^2}(z-1)^2 = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{(z-1) z^2} = \lim_{z\to1}\frac{z+1}{z^2} = 2,$$

$$b_{2,1} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z+1}{(z-1)^3 z^2} = \lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\frac{z+1}{(z-1)^3} = -2\lim_{z\to0}\frac{z+2}{(z-1)^4} = -4,$$

$$b_{2,2} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z+1}{(z-1)^3 z^2} z = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z+1}{(z-1)^3 z} = \lim_{z\to0}\frac{z+1}{(z-1)^3} = -1.$$

Pelo que

$$\frac{z+1}{(z-1)^3 z^2} = \frac{4}{z-1} - \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

Exemplo 17.2 *Considere-se a função* $\frac{1}{z^4+1}$. *Temos então a decomposição*

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{b_1}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{b_2}{z-e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{b_3}{z-e^{i\frac{5\pi}{4}}} + \frac{b_4}{z-e^{i\frac{7\pi}{4}}},$$

com ($k = 0, 1, 2, 3$*)*

$$\begin{aligned} b_k &= \operatorname*{Res}_{z=e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{z^4+1} \\ &= \lim_{z\to e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}} \frac{z-e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}}{z^4+1} \\ &= \lim_{z\to e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} \\ &= \frac{1}{4e^{i(2k+1)\frac{3\pi}{4}}} \\ &= \frac{1}{4}e^{-i(2k+1)\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{7\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{5\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right).$$

Note-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^4+1} &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{7\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{7\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{z-e^{i\frac{5\pi}{4}}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{z\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}+e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)-e^{i\frac{12\pi}{4}}-e^{i\frac{4\pi}{4}}}{z^2-\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)z+1} + \frac{z\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)-e^{i\frac{12\pi}{4}}-e^{i\frac{4\pi}{4}}}{z^2-\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)z+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-z\sqrt{2}+2}{z^2-\sqrt{2}z+1} + \frac{z\sqrt{2}+2}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-z\sqrt{2}+2}{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{z\sqrt{2}+2}{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

que é a decomposição em fracções simples reais.