

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

## 18.1 Equação diferencial; conceitos e notações

Uma equação diferencial é uma relação entre uma função  $y$  e as suas derivadas, podendo envolver as variáveis de  $y$ . Esta equação poderá determinar a função  $y$ .

**Exemplo 18.1** A relação

$$y' = e^t,$$

é uma equação diferencial onde a incógnita é a função  $y(t)$ . Esta equação pode ser resolvida por simples primitivação, obtendo-se  $y(t) = e^t + c$ , onde  $c$  é uma constante real arbitrária, i.e. para cada valor de  $c$  obtém-se uma solução diferente da mesma equação diferencial.

**Exemplo 18.2** A relação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

é uma equação diferencial onde a incógnita é a função  $u(x, y)$ . Já sabemos que as soluções desta equação são as partes reais das funções analíticas.

Uma equação como a do exemplo anterior diz-se uma **equação diferencial parcial**, ou equação diferencial às (com) derivadas parciais, em oposição às equações diferenciais ordinárias.

Uma **equação diferencial ordinária** é uma relação entre uma função  $y$  de **uma** variável real e as suas derivadas.

A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem de derivação que aparece na equação.

**Exemplo 18.3** A relação

$$y'' + \sin y = 0,$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, onde a incógnita é a função  $y(t)$ .

**Exemplo 18.4** A relação

$$x''' + t^2 x' + \sin x = \operatorname{arctg} t,$$

é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem, onde a incógnita é a função  $x(t)$ .

**Exemplo 18.5**  $\frac{du}{ds} + ue^s + s^2 = u^2,$

é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, onde a incógnita é a função  $u(s)$ .

**Exemplo 18.6**  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, onde a incógnita é a função  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  com valores em  $\mathbb{R}^3$ .

Conforme o contradomínio da função incógnita, as EDO classificam-se em escalares ou vectoriais.

## 18.2 Lei de Newton

No Séc. XVII Newton propôs a seguinte lei geral da mecânica (Lei de Newton)

$$ma = F$$

onde a força  $F$  pode depender da posição  $x$ , da velocidade  $v = \frac{dx}{dt}$  e do tempo  $t$ . Trata-se de uma equação diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

ou (com  $v = \frac{dx}{dt}$ )

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

no caso em que  $F$  só dependa de  $v$  e  $t$ .

Newton não só inventou esta lei geral da mecânica, que é "os movimentos físicos podem ser descritos pelas soluções de uma equação diferencial", como descreveu  $F$  no caso da atracção gravítica, obtendo pela primeira vez na história, uma lei que explicou de forma universal o movimento planetário. Todo este formalismo continua a ser aplicado com êxito, por exemplo, nas viagens espaciais.

## 18.3 Modelos

Esta abordagem aplicada com tanto sucesso na astronomia depressa se transformou numa pedra basilar de toda a ciência:

Num certo contexto pretendemos estudar a dependência temporal de uma certa quantidade  $y(t)$ , (por exemplo, para fazer previsões)

$$y(t) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

onde a variável  $t$  representa habitualmente o tempo. A quantidade  $y(t)$  pode representar, conforme o objecto do estudo, a posição de um corpo, um sinal eléctrico, a concentração de um reagente ou a cotação das acções da PT... A ideia é arranjar um modelo não directamente para a quantidade global  $y(t)$ , mas fazer raciocínios com base em acções instantâneas envolvendo quantidades como a taxa de variação instantânea:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{dy}{dt}(t)$$

e assim chegar a uma lei do tipo

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), t).$$

Finalmente com base nesta lei, que é uma equação diferencial, determinar o comportamento global  $y(t)$ , i. e. resolver a equação diferencial.

## 18.4 Exemplo

O volume  $v(t)$  de líquido num tanque ( $v$  em litros,  $t$  em segundos) é, no instante inicial  $t = 0$ , igual a 3 litros. Sabendo que o tanque enche à razão de 

a) 0,1
b) $t/100$
c) $t/100 - v/100$

 litros por segundo, determine o volume de líquido no tanque ao final de 10 segundos.

- a) É um problema de instrução primária. Mas que pode ser resolvido via equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad v(0) = 3.$$

$v(0) = 3$  é uma **condição inicial**. Integrando entre 0 e  $t$

$$v(t) - v(0) = \frac{t}{10}.$$

Donde  $v(10) = 3 + \frac{10}{10} = 4$  litros .

- b) Este novo problema corresponde ao abrir da torneira que deita o líquido para o tanque. É um problema de primitivação simples:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t}{100} \quad \text{e} \quad v(0) = 3$$

integrando entre 0 e  $t$

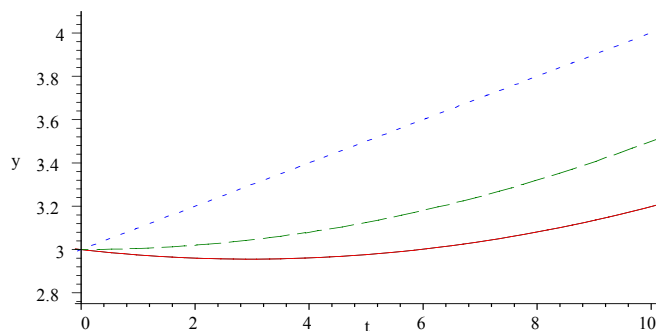
$$v(t) - v(0) = \frac{t^2}{200}.$$

Donde  $v(10) = 3 + \frac{10^2}{200} = 3,5$  litros .

- c) Temos a situação anterior mas agora o tanque está furado e escoo líquido em proporção com a altura do líquido no tanque. Agora temos uma equação diferencial que ainda não sabemos resolver:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t}{100} - \frac{v}{100} \quad \text{e} \quad v(0) = 3$$

No que se segue vamos justamente aprender a resolver equações deste tipo (equações lineares). Iremos obter  $v(t) = t + 103e^{-\frac{1}{100}t} - 100$  e o valor (aproximado)  $v(10) \approx 3.198$ .



Evolução do volume de líquido nos três casos:

- a) a pontilhado; b) a tracejado; c) a cheio.

