19 ª Aula 2004.10.27 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

19.1 Equações lineares

As equações lineares de primeira ordem (escalares) são da forma:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\, y = b(t),$$

onde são dadas as funções $a(t)$ e $b(t)$, procurando-se a função $y(t)$. Geralmente, a um problema que envolva uma EDO, está associada uma **condição inicial**

$$y(t_0) = y_0.$$

Ao problema de resolver uma EDO com uma condição inicial chamamos **PVI (Problema de valor inicial)**. Vamos agora resolver dois casos triviais da equação linear.

A funções $a(t)$ e $b(t)$ supõem-se continuas num determinado intervalo I, pelo que têm primitiva no mesmo intervalo e podem, portanto, ser integradas em qualquer subintervalo de I.

19.1.1 Caso $a(t) = 0$.

Neste caso o problema resume-se a uma simples primitivação:

$$\frac{dy}{dt} = b(t),$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + y_0.$$

Exemplo 19.1 *O seguinte PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{-t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem como solução[1]

$$y(t) = \int_0^t e^{-s^2}\, ds.$$

---

[1] A função $\int_0^t e^{-s^2}\, ds$ não tem uma expressão elementar simples mas encontra-se devida,mente tabelada (distribuição normal). Podemos contudo exprimir esta função em temos de séries de potências:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-s^2}\, ds &= \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{s^{2n}}{n!}\, ds = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^t \frac{s^{2n}}{n!}\, ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}. \end{aligned}$$

19.1.2 Caso $b(t) = 0$. (lineares homogéneas)

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = 0, \tag{19.1}$$

Se $y_0 = 0$, temos uma solução trivial $y(t) \equiv 0$. Pelo que no que se segue supõe-se $y_0 \neq 0$ (pelo que $y(t) \neq 0$ pelo menos para valores de t numa vizinhança de t_0). Dividindo a equação por y obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a(t),$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\log|y| = -a(t).$$

Por primitivação vem

$$\log|y(t)| = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + \log|y_0|,$$

e exponenciando sai

$$y(t) = \pm y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},$$

podemos então concluir que se $y_0 \neq 0$, então $y(t)$ não se anula nunca porque $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \neq 0$. Usando novamente a condição inicial obtemos

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Note-se que esta formula é ainda válida no caso $y_0 = 0$ (por verificação directa). Por outro lado se $y(t)$ tem esta forma, então $y'(t) = \left(y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\right)' = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)' = -a(t)\,y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} = -a(t)\,y(t)$. Ou seja, uma função $y(t)$ é solução de (19.1) sse tem a forma

$$y(t) = Ke^{-\int a(t)\,dt},$$

onde K é uma constante arbitrária.

Exemplo 19.2 *Considerando o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{y} + \cos t\; y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

temos

$$y(t) = Ke^{-\int \cos t dt} = Ke^{-\operatorname{sen} t},$$

$$1 = y(0) = K,$$

portanto a solução é

$$y(t) = e^{-\operatorname{sen} t}$$

Mudando a condição inicial para $y(0) = 0$ obteríamos $y(t) = 0$, $\forall t$. Considerando a condição inicial $y(2) = 3$, obteríamos

$$y(t) = 3e^{-(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2)} = 3e^{\operatorname{sen} 2}e^{-\operatorname{sen} t}.$$

19.1.3 Factor de integração

Consideremos agora o caso geral

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t) \quad , \qquad y(t_0) = y_0. \tag{19.2}$$

Multiplique-se (19.2) por $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ $\quad (\neq 0)$ **(factor de integração)** [2]:

$$\mu \frac{dy}{dt} + a(t)\,\mu y = \mu(t)\,b(t)\,,$$

mas $\dfrac{d\mu}{dt} = a(t)\,\mu$, donde

$$\mu \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt} y = \mu(t)\,b(t)$$

e, de acordo com a regra de derivação do produto,

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu(t)\,b(t)\,.$$

Integrando entre t_0 e t, vem

$$\mu(t)\,y(t) - \mu(t_0)\,y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mu(s)\,b(s)\,ds,$$

e como $\mu(t_0) = 1$ e $y(t_0) = y_0$, obtem-se

$$y(t) = \frac{y_0}{\mu(t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mu(s)}{\mu(t)} b(s)\,ds.$$

Mas $\dfrac{\mu(s)}{\mu(t)} = e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau}$, donde:

19.1.4 Solução

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)\,ds$$

Teorema 19.1 *Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $a(t)$ e $b(t)$ duas funções contínuas em I. Então o problema*

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t) \quad , \qquad y(t_0) = y_0.$$

tem uma única solução dada por

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)\,ds$$

que está definida em todo o intervalo I e é de classe C^1.

[2] Por razões estéticas, escreve-se por vezes y e μ em vez de $y(t)$ e $\mu(t)$, respectivamente.

19.1.5 Exemplo

Exemplo 19.3 *Vamos resolver o seguinte PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{1+t} y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Como a equação é linear podemos desde já garantir que o intervalo de definição da solução é $]-1, +\infty[$*, porque a equação não está definida para* $t = -1$ *e o instante inicial é*

$$t_0 = 0 \in \left]-1, +\infty\right[.$$

Multiplicando a equação por um factor de integração μ*, temos*

$$\mu \frac{dy}{dt} + \frac{1}{1+t} \mu y = \mu,$$

que à equivalente à equação

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu, \tag{19.3}$$

se

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{1+t} \mu.$$

Portanto (para $t \in \left]-1, +\infty\right[$*)*

$$\begin{aligned} \mu &= K e^{\int \frac{1}{1+t} dt} = K e^{\log(1+t)} \\ &= K(1+t). \end{aligned}$$

Tomemos $\mu = 1 + t$*. Então de (19.3) vem*

$$\frac{d}{dt}((1+t)y) = 1 + t$$

e por integração

$$(1+t)y = t + \frac{t^2}{2} + c.$$

De $y(0) = 0$*, obtemos* $c = 0$ *e a solução pretendida*

$$y(t) = \frac{t + \frac{t^2}{2}}{1+t}$$