(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

20.1 Equações Separáveis

Vamos agora considerar equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \quad , \qquad y(t_0) = y_0, \tag{20.1}$$

onde g e f são funções contínuas.

20.1.1 Primitivação

Temos

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Seja $F(y)$ **uma primitiva de** $f(y)$, i. e. $F'(y) = f(y)$, então

$$F'(y)\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Donde

$$\frac{d}{dt}F(y) = g(t),$$

porque $\frac{d}{dt}F(y(t)) = F'(y(t))\frac{dy}{dt}(t)$, (derivação da função composta). Sendo $G(t)$ **uma primitiva de** $g(t)$, obtemos

$$F(y(t)) = G(t) + c. \tag{20.2}$$

Onde a constante c é determinada pela condição inicial $y(t_0) = y_0$:

$$c = F(y_0) - G(t_0)$$

20.1.2 Inversão

A relação (20.2) dá-nos a solução pretendida se definir implicitamente $y(t)$. I. e. se $F(y)$ for invertível numa vizinhança de y_0. De facto se F^{-1} **é a função inversa (local)** de F, obtemos

$$y(t) = F^{-1}(G(t) + c).$$

Podemos garantir a existência de F^{-1} - função inversa (local) de F numa vizinhança de y_0 - através do Teorema da função inversa com a condição de F ter derivada contínua e $F'(y_0) \neq 0$. Ou seja se $f(y)$ for contínua numa vizinhança de $y = y_0$ e

$$f(y_0) \neq 0.$$

Esta condição é suficiente para garantir a invertibilidade de F, mas não é uma condição necessária como poderemos ver no Exemplo 20.3 mais à frente.

20.1.3 Solução

Teorema 20.1 *Seja*

1. $g(t)$ *um função continua na vizinhança do ponto* $t = t_0$,
2. $f(y)$ *um função continua na vizinhança do ponto* $y = y_0$ *e tal que* $f(y_0) \neq 0$.

Então o problema

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \quad , \qquad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução $y(t)$ *de classe* C^1 *definida numa vizinhança de* $t = t_0$, *definida implicitamente pela relação*

$$F(y(t)) = G(t) + c,$$

onde F *é uma primitiva de* f, G *uma primitiva de* g, *e* $c = F(y_0) - G(t_0)$.

20.1.4 Exemplos

Exemplo 20.1 *Considere-se o PVI (problema de valor inicial)*

$$\frac{dy}{dt} = \cos^2 y \cos t \quad \textit{com} \quad y(0) = \pi.$$

Temos $\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dt} = \cos t$, *primitivando vem* $\operatorname{tg} y = \operatorname{sen} t + c$, *e pela condição inicial* $y(0) = \pi$, *concluímos* $\operatorname{tg} y = \operatorname{sen} t$. ***Invertendo a função*** tg ***numa vizinhança de*** π, *obtemos*

$$y = \pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)$$

Exemplo 20.2 *Considere-se o PVI (problema de valor inicial)*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\cos y} \quad \textit{com} \quad y(0) = \pi.$$

Temos $\cos y \frac{dy}{dt} = t$, *primitivando vem* $\operatorname{sen} y = \frac{t^2}{2} + c$, *e pela condição inicial* $y(0) = \pi$, *concluímos* $\operatorname{sen} y = \frac{t^2}{2}$. ***Invertendo a função*** sen ***numa vizinhança de*** π *obtemos*

$$y = \pi - \operatorname{arcsen} \frac{t^2}{2}.$$

Esta solução está definida para $-1 < \frac{t^2}{2} < 1$, *ou seja* $t \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

Exemplo 20.3 *Considere-se o PVI (problema de valor inicial)*

$$y^2 \frac{dy}{dt} = 3t^8 \quad \textit{com} \quad y(0) = 0.$$

Primitivando vem $\frac{y^3}{3} = \frac{t^9}{3} + c$, *e pela condição inicial* $y(0) = 0$, *concluímos* $y^3 = t^9$. ***Invertendo a função*** y^3, *obtemos*

$$y(t) = t^3.$$

Esta solução está definida todo $t \in \mathbb{R}$.