21 ª Aula 2004.11.03 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

21.1 Soluções gerais

Exemplo 21.1 *Vamos determinar a solução geral de*

$$\frac{dy}{dt} = t\left(y^2 - 1\right).$$

Para $y \neq \pm 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(y^2-1)}\frac{dy}{dt} = t \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)\frac{dy}{dt} = t \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\log|y-1| - \log|y+1|\right) = \frac{t^2}{2} + c \qquad \textit{onde } c \textit{ é uma constante arbitrária} \\
&\Leftrightarrow \quad \log\frac{|y-1|}{|y+1|} = t^2 + 2c \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{t^2+2c} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2c}e^{t^2},
\end{aligned}$$

designando $K = \pm e^{2c}$ (i. e. K é uma constante arbitrária não nula), obtemos

$$y = \frac{1+Ke^{t^2}}{1-Ke^{t^2}}. \tag{21.1}$$

Por outro lado facilmente se reconhece que as funções constantes

$$y(t) \equiv 1 \quad e \quad y(t) \equiv -1$$

são soluções da equação diferencial. Atendendo que a solução $y(t) \equiv 1$ se obtem da expressão (21.1) com $K = 0$, concluímos que a ***solução geral*** *da equação dada é*

$$y(t) = \frac{1+Ke^{t^2}}{1-Ke^{t^2}} \quad ou \quad y(t) \equiv -1,$$

onde K é uma constante real arbitrária.

21.2 Intervalo máximo de definição e "blow up"

Exemplo 21.2 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2\,t \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

Temos uma equação separável

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} = t$$

donde

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + c.$$

Da condição $y(1) = 1$, *obtemos* $c = \frac{-3}{2}$; *e portanto*

$$y(t) = \frac{2}{3 - t^2}$$

Temos

$$\lim_{t \to \sqrt{3}^-} y(t) = +\infty$$

Dizemos que a solução ***explode*** *em* $t = \sqrt{3}$. *A designação em inglês é correntemente mais empregue: "verifica-se um* ***blow up****". Note-se que a solução também* ***explode*** *em* $t = -\sqrt{3}$:

$$\lim_{t \to \left(-\sqrt{3}\right)^+} y(t) = +\infty$$

Temos portanto que a solução deste PVI só está definida no intervalo

$$\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$$

que se designa por ***intervalo máximo de definição*** *da solução.*

Exemplo 21.3 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-t}{y-1} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Temos uma equação separável

$$(y-1)\frac{dy}{dt} = -t$$

donde

$$\frac{y^2}{2} - y = -\frac{t^2}{2} + c.$$

Da condição $y(0) = 0$, *obtemos* $c = 0$; *e portanto*

$$y^2 - 2y + t^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação obtemos

$$y(t) = 1 \pm \sqrt{1 - t^2}.$$

Novamente da condição inicial obtemos

$$y(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}.$$

Claramente que o intervalo de definição desta solução é

$$]-1,1[$$

De facto este é o ***intervalo máximo de definição*** *da solução, uma vez que esta não pode ser prolongada por continuidade de forma diferenciável: apesar de*

$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = 1 \quad e \quad \lim_{t\to(-1)^+} y(t) = 1,$$

temos

$$\lim_{t\to 1^-} y'(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = +\infty \quad e \quad \lim_{t\to(-1)^+} y'(t) = -\infty.$$

Também nesta situação dizemos que ***a solução explode*** *(que há um blow up).*

Exemplo 21.4 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Temos uma equação separável, pelo que de

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y' = 2t,$$

obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int 2t\, dt.$$

Portanto

$$\operatorname{arcsen} y = t^2 + c.$$

Utilizando a condição inicial $y(0) = 0$ *vem*

$$\operatorname{arcsen} y = t^2,$$

para $t^2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Donde*

$$y = \operatorname{sen} t^2 \quad se \quad t \in \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[.$$

Por outro lado, atendendo a que

$$\lim_{t\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} \operatorname{sen} t^2 = 1,$$

$$\lim_{t\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} \left(\operatorname{sen} t^2\right)' = \lim_{t\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} 2t\cos t^2 = 0$$

e a que a função constante igual a 1 *é solução da equação diferencial dada, concluímos que*

$$y(t) = \begin{cases} 1 & se \quad t \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \\ \operatorname{sen} t^2 & se \quad t \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \\ 1 & se \quad t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\infty\right[\end{cases}$$

é solução do problema de valor inicial considerado, sendo portanto $\mathbb{R}$ *o seu* ***intervalo máximo de definição****.*

21.3 Soluções definidas implicitamente

Exemplo 21.5 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y^6 + y^2 + 1} \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Temos uma equação separável $\left(y^6 + y^2 + 1\right)\dfrac{dy}{dt} = 1$, *donde* $\dfrac{y^7}{7} + \dfrac{y^3}{3} + y = t + c$. *Da condição* $y(1) = 0$, *obtemos* $c = -1$; *e portanto*

$$\frac{y^7}{7} + \frac{y^3}{3} + y = t - 1 \quad e \quad y(1) = 0,$$

define implicitamente a solução procurada, uma vez que $f(0) = 1 \neq 0$, *onde* $f(y) = y^6 + y^2 + 1$. *Apesar de não conseguirmos explicitar a solução podemos ainda, neste caso, calcular o intervalo máximo de definição: Designando*

$$F(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} + x,$$

temos $F'(x) = x^6 + x^2 + 1 > 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, *pelo que* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é bijectiva. Designando então por* $F^{-1}(x)$ *a função inversa*[1] *de* $F(x)$, *obtemos*

$$y(t) = F^{-1}(t-1),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. *Concluímos então, que o intervalo máximo de definição desta solução é* $\mathbb{R}$.

21.4 Equações exactas

21.4.1 Da solução à equação

De acordo com os exemplos anteriores, consideramos que determinámos a solução $y(t)$ de uma equação diferencial escalar de primeira ordem quando chegamos a uma relação

$$\varphi(t, y) = c = \varphi(t_0, y_0)$$

que define implicitamente $y(t)$ (o teorema da função implícita pode ser usado se $\varphi \in C^1$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$). Tentemos agora, por raciocínio inverso, redescobrir a equação diferencial:

Temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, y(t)) = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, y(t))\frac{dy}{dt}(t) = 0.$$

[1] Que é diferenciável e tem derivada contínua; $\left(F^{-1}\right)' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}}$.

Portanto $y(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,y)\frac{dy}{dt}=0.$$

Será que esta era a equação inicial? Como iremos ver pode ser que não.

No entanto, concluímos que dada uma equação da forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$$

e a condição inicial

$$y(t_0)=y_0,$$

com $\varphi \in C^1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0,y_0)\neq 0$, então a solução é dada implicitamente por

$$\varphi(t,y)=c=\varphi(t_0,y_0) \quad \text{e} \quad y(t_0)=y_0.$$

21.4.2 Solução de equações exactas

Considere-se agora uma equação geral da forma

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0.$$

Pela análise anterior, conseguimos resolver esta equação se existir uma função $\varphi \in C^1$ com $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0,y_0)\neq 0$ tal que

$$M(t,y)=\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y) \quad \text{e} \quad N(t,y)=\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,y),$$

ou seja sse o campo (M,N) for uma campo gradiente numa vizinhança da condição inicial (t_0,y_0). Portanto, sse (M,N) for fechado (nessa vizinhança). Ou seja $M,N\in C^1$ tal que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t_0,y_0)\neq 0.$$

Nestas condições dizemos que temos uma **equação diferencial exacta**.

Teorema 21.1 *Seja o PVI*

$$M+N\frac{dy}{dt}=0 \quad e \quad y(t_0)=y_0,$$

com $M,N\in C^1$ tais que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)=\frac{\partial N}{\partial t}(t,y),$$

para qualquer (t,y) numa vizinhança de (t_0,y_0) e $N(t_0,y_0)\neq 0$. Então o o PVI considerado tem uma única solução $y(t)$ de classe C^1 definida numa vizinhança de $t=t_0$, dada implicitamente pela relação

$$\varphi(t,y)=c \quad e \quad y(t_0)=y_0,$$

onde $c=\varphi(t_0,y_0)$ e φ é definido (a menos de uma constante aditiva) por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y)=M(t,y) \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,y)=N(t,y)$$

Exemplo 21.6 *Considere-se o problema de valor inicial:*

$$y^4 - \frac{1}{t^2+1} + 4ty^3\frac{dy}{dt} = 0 \quad e \quad y(1) = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}.$$

Definindo

$$M = y^4 - \frac{1}{t^2+1} \quad e \quad N = 4ty^3,$$

temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 = \frac{\partial N}{\partial t},$$

pelo que a equação é exacta. Então determinemos φ *tal que*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = y^4 - \frac{1}{t^2+1} \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4ty^3.$$

Integrando em ordem a t *a primeira equação temos*

$$\varphi = ty^4 - \operatorname{arctg} t + f(y),$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4ty^3 + f'(y).$$

Donde $f(y)$ *é constante e podemos tomar*

$$\varphi = ty^4 - \operatorname{arctg} t.$$

Então a solução do problema é dada por

$$ty^4 - \operatorname{arctg} t = \varphi\left(1, \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 1 = 0.$$

Explicitando obtemos (atendendo que $y(1) > 0$*)*

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{\operatorname{arctg} t}{t}},$$

definida para $t > 0$*. O intervalo máximo de definição é* $\mathbb{R}$*. De facto como*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$$

e

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\operatorname{arctg} t}{t} > 0,$$

a função (diferenciável em $\mathbb{R}$*)*

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{\operatorname{arctg} t}{t}} & , \text{ se } t \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

é solução do problema dado.