22 ª Aula 2004.11.05 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

22.1 Equações redutíveis a exactas.

22.1.1 Exemplo

Considere-se o seguinte problema:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{y}-\frac{y}{t} \quad \text{com} \quad y(1)=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(Note-se que numa vizinhança do ponto $(t,y)=\left(1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $ty\neq 0$).

1. Temos $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t-y^2}{ty}$, ou ainda

$$y^2-t+ty\frac{dy}{dt}=0, \tag{22.1}$$

   que é da forma $M+N\dfrac{dy}{dt}=0$,com $M=y^2-t$ e $N=ty$. Temos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq y=\frac{\partial N}{\partial t},$$

   pelo que a equação (22.1) não é exacta.

2. Mas também podemos escrever $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t^2-ty^2}{t^2y}$, ou seja

$$ty^2-t^2+t^2y\frac{dy}{dt}=0, \tag{22.2}$$

   que é da forma $M+N\dfrac{dy}{dt}=0$,com $M=ty^2-t^2$ e $N=t^2y$. Temos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2ty=\frac{\partial N}{\partial t},$$

   pelo que a equação (22.2) é exacta.
   Determinando φ tal que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=ty^2-t^2$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=t^2y$, obtemos por exemplo $\varphi=\dfrac{t^2y^2}{2}-\dfrac{t^3}{3}$. Atendendo à condição inicial, a solução satisfaz a $\dfrac{t^2y^2}{2}-\dfrac{t^3}{3}=0$, donde se obtem (utilizando novamente a condição inicial) $y=\sqrt{\dfrac{2t}{3}}$.

Deste exemplo podemos concluir que o facto de uma equação ser exacta ou não é mais uma questão de forma do que de conteúdo.

22.1.2 Factores de integração

Do exemplo anterior concluímos que uma EDO não exacta se pode transformar numa EDO exacta multiplicando-a por uma função $\mu \neq 0$, que em geral podemos pensar que depende de t e de y ($\mu \equiv \mu(t,y)$), designada por **factor de integração.**

Consideremos então

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

e

$$\mu(t,y)\, M(t,y) + \mu(t,y)\, N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

ou simplificando a notação

$$\mu M + \mu N\frac{dy}{dt} = 0,$$

esta equação será exacta se

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N),$$

ou seja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}N + \mu\frac{\partial N}{\partial t},$$

ou ainda

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}N - \frac{\partial \mu}{\partial y}M = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right). \tag{22.3}$$

Contudo, em geral, é igualmente difícil determinar uma solução não nula desta equação diferencial às derivadas como determinar uma solução da equação diferencial ordinária original. Somente em alguns casos especiais que analisaremos de seguida é possível obter facilmente uma função $\mu(t,y) \neq 0$ solução de (22.3).

22.1.3 Factores de integração Independentes de y; $\mu \equiv \mu(t)$

Vamos ver em que condições a equação (22.3) tem uma solução independente da segunda variável y. Suponha-se então que esta equação tem uma solução da forma

$$\mu \equiv \mu(t).$$

Neste caso temos $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial \mu}{\partial t} \equiv \frac{d\mu}{dt}$ e equação (22.3) fica:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu, \tag{22.4}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogénea sse

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = 0,$$

ou seja se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \text{ só depende da variável } t \text{ (ou é constante).}$$

Portanto se esta condição é satisfeita (e apenas quando o é) podemos calcular um factor de integração $\mu(t)$ resolvendo a equação (22.4).

Exemplo 22.1 *Considere-se a equação*

$$y^2 e^{t^2} + 2t + 2tye^{t^2}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $M = y^2 e^{t^2} + 2t$ *e* $N = 2tye^{t^2}$, *vem*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{2ye^{t^2} - 2ye^{t^2} - 4t^2 ye^{t^2}}{2tye^{t^2}} = -2t$$

Determinemos então uma função $\mu(t) \neq 0$ *tal que* $\frac{d\mu}{dt} = -2t\mu$, *por exemplo* $\mu = e^{-t^2}$. *Multiplicando a equação original por este factor obtemos*

$$y^2 + 2te^{-t^2} + 2ty\frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $\check{M} = y^2 + 2te^{-t^2}$ *e* $\check{N} = 2ty$, *e* φ *tal que* $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \check{M}$ *e* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \check{N}$. *Por exemplo*

$$\varphi = ty^2 - e^{-t^2}$$

Pelo que temos as seguintes soluções do problema dado:

$$ty^2 - e^{-t^2} = c$$

ou

$$y = \pm\sqrt{\frac{c + e^{-t^2}}{t}}$$

onde c *é uma constante arbitrária.*

22.1.4 Factores de integração Independentes de t; $\mu \equiv \mu(y)$

Vamos ver em que condições a equação (22.3) tem uma solução independente da primeira variável t. Suponha-se então que esta equação tem uma solução da forma

$$\mu \equiv \mu(y).$$

Neste caso temos $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv \frac{d\mu}{dy}$ e e equação (22.3) fica:

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}\mu, \tag{22.5}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogénea sse

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} = 0,$$

ou seja se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} \text{ só depende da variável } y \text{ (ou é constante).}$$

Portanto se esta condição é satisfeita (e apenas quando o é) podemos calcular um factor de integração $\mu(y)$ resolvendo a equação (22.5).

Exemplo 22.2 *Considere-se a equação*

$$\operatorname{ch}(te^y) + (1 + t\operatorname{ch}(te^y))\frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $M = \operatorname{ch}(te^y)$ *e* $N = 1 + t\operatorname{ch}(te^y)$, *vem*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} = \frac{te^y\operatorname{sh}(te^y) - \operatorname{ch}(te^y) - te^y\operatorname{sh}(te^y)}{\operatorname{ch}(te^y)} = -1$$

Determinemos então uma função $\mu(y) \neq 0$ *tal que* $\frac{d\mu}{dy} = \mu$, *por exemplo* $\mu = e^y$. *Multiplicando a equação original por este factor obtemos*

$$e^y\operatorname{ch}(te^y) + e^y(1 + t\operatorname{ch}(te^y))\frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $\tilde{M} = e^y\operatorname{ch}(te^y)$ *e* $\tilde{N} = e^y + te^y\operatorname{ch}(te^y)$, *e* φ *tal que* $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \tilde{M}$ *e* $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \tilde{N}$. *Por exemplo*

$$\varphi = e^y + \operatorname{sh}(te^y)$$

Pelo que temos as seguintes soluções do problema, dadas de forma implícita pela relação:

$$e^y + \operatorname{sh}(te^y) = c.$$

onde c *é uma constante arbitrária.*

Exemplo 22.3 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\cos t\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} t\cos y\frac{dy}{dt} = 0 \quad com \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Sejam $M = \cos t\operatorname{sen} y$ *e* $N = 2\operatorname{sen} t\cos y$.

- *Temos*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} = \frac{\cos t\cos y - 2\cos t\cos y}{\cos t\operatorname{sen} y} = -\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}$$

Determinemos então uma função $\mu(y) \neq 0$ *tal que* $\frac{d\mu}{dy} = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\mu$, *por exemplo* $\mu = \operatorname{sen} y$. *Multiplicando a equação original por este factor obtemos*

$$\cos t\operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen} t\operatorname{sen} y\cos y\frac{dy}{dt} = 0,$$

que é uma equação exacta; equivalente a

$$\operatorname{sen} t\operatorname{sen}^2 y = c.$$

onde c *é uma constante arbitrária. Usando a condição inicial obtém-se*

$$y(t) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1}{2\operatorname{sen} t}} \quad para \quad t \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[.$$

- *Note-se no entanto que*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}=\frac{\cos t\cos y-2\cos t\cos y}{2\cos t\operatorname{sen} y}=-\frac{\cos t}{2\operatorname{sen} t},$$

pelo que a equação também admite um factor de integração da forma $\mu\equiv\mu(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}$ *(para* t *numa vizinhança de* $\frac{\pi}{2}$*). Multiplicando a equação original por este factor obtemos*

$$\frac{\cos t}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}\operatorname{sen} y+2\sqrt{\operatorname{sen} t}\cos y\frac{dy}{dt}=0.$$

que é uma equação exacta; equivalente a

$$2\sqrt{\operatorname{sen} t}\operatorname{sen} y=c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Usando a condição inicial obtém-se novamente*

$$y(t)=\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1}{2\operatorname{sen} t}}\quad \textit{para}\quad t\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[.$$

- *Mas também a equação original pode ser transformada (dividindo por* $\operatorname{sen} y\cos t$ *) em*

$$2\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\frac{dy}{dt}=-\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t},$$

que é separável. Por integração directa vem (para t *numa vizinhança de* $\frac{\pi}{2}$*)*

$$\log\operatorname{sen}^2 y=-\log\operatorname{sen} t+c.$$

Usando a condição inicial temos

$$c=\log\frac{1}{\sqrt{2}},$$

e novamente

$$y(t)=\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1}{2\operatorname{sen} t}}\quad \textit{para}\quad t\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[.$$

Enquanto algumas EDO's têm uma forma que encaminha a resoluções mais ou menos óbvias, outras podem ser resolvidas por diferentes processos, como vimos neste último exemplo; outras ainda, a maior parte, não pode ser resolvida por nenhum dos métodos atrás referidos.

22.1.5 Outras formas para os factores de integração

Noutros casos especialíssimos podemos adivinhar uma forma simples para um factor de integração e obter assim a solução de uma equação diferencial ordinária. A título de exemplo analisamos de seguida os casos em que a equação diferencial admite um factor de integração da forma $\mu\equiv\mu(t+y)$ e da forma $\mu\equiv\mu(ty)$; contudo, outros exemplos podem facilmente ser inventados (e.g. $\mu\equiv\mu(t^3+ty^3)$, $\mu\equiv\mu\left(\frac{t}{y}\right)$,...).

Factores da forma $\mu \equiv \mu(t+y)$: Vamos ver em que condições a equação (22.3) tem uma solução da forma

$$\mu \equiv \mu(t+y).$$

Neste caso temos $\frac{\partial}{\partial t}\mu(t+y) = \mu'(t+y) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(t+y)$ e ficamos com

$$\mu' = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N-M}\mu,$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogénea sse

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N-M} \text{ só depende da variável } t+y.$$

Portanto se esta condição é satisfeita (e apenas quando o é) podemos calcular um factor de integração da forma $\mu \equiv \mu(t+y)$.

Exemplo 22.4 *Considere-se a equação*

$$y + t^2y + t^3 + (y+t)\left(1+t^2\right)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $M = y + t^2y + t^3$ *e* $N = (y+t)(1+t^2)$, *vem*

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N-M} &= \frac{1+t^2-(1+t^2)-2t(y+t)}{(y+t)(1+t^2)-y(1+t^2)-t^3} = \frac{-2t(y+t)}{t} \\ &= -2(y+t)\end{aligned}$$

Determinemos então uma função $\mu(s) \neq 0$ *tal que*

$$\frac{d\mu}{ds} = -2\mu,$$

por exemplo $\mu = e^{-s^2}$. *Multiplicando a equação original pelo factor* $e^{-(y+t)^2}$ *obtemos*

$$\left(y + t^2(y+t)\right)e^{-(y+t)^2} + (y+t)\left(1+t^2\right)e^{-(y+t)^2}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam

$$\hat{M} = \left(-t + \left(1+t^2\right)(y+t)\right)e^{-(y+t)^2} \qquad e \qquad \hat{N} = (y+t)\left(1+t^2\right)e^{-(y+t)^2},$$

e φ *tal que* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \hat{M}$ *e* $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \hat{N}$. *Por exemplo*

$$\varphi = \frac{-1}{2}\left(1+t^2\right)e^{-(y+t)^2}$$

Pelo que temos as seguintes soluções do problema, dadas de forma implícita pela relação:

$$\left(1+t^2\right)e^{-(y+t)^2} = c.$$

onde c *é uma constante arbitrária positiva. Ou ainda*

$$y = -t \pm \sqrt{\log\frac{1+t^2}{c}}.$$

Factores da forma $\mu \equiv \mu(ty)$: Vamos ver em que condições a equação (22.3) tem uma solução da forma

$$\mu \equiv \mu(ty).$$

Neste caso temos $\frac{\partial}{\partial t}\mu(ty) = y\mu'(ty)$ e $\frac{\partial}{\partial y}\mu(ty) = t\mu'(ty)$ e ficamos com

$$\mu' = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{yN - tM}\mu,$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogénea sse

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{yN - tM} \text{ só depende da variável } ty.$$

Portanto se esta condição é satisfeita (e apenas quando o é) podemos calcular um factor de integração da forma $\mu \equiv \mu(ty)$.

Exemplo 22.5 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$t + \left(t + t^3\right)y^2 + \left(t^2 + t^4\right)y\frac{dy}{dt} = 0 \quad com \quad y(1) = 1.$$

Sejam $M = t + \left(t + t^3\right)y^2$ *e* $N = (t^2 + t^4)\,y$, *vem*

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{yN - tM} &= \frac{2\left(t + t^3\right)y - \left(2t + 4t^3\right)y}{\left(t^2 + t^4\right)y^2 - t^2 - \left(t^2 + t^4\right)y^2} = \frac{-2t^3y}{-t^2} \\ &= 2ty.\end{aligned}$$

Determinemos então uma função $\mu(s) \neq 0$ *tal que*

$$\frac{d\mu}{ds} = 2s\mu,$$

por exemplo $\mu = e^{s^2}$. *Multiplicando a equação original pelo factor* $e^{t^2y^2}$ *obtemos*

$$\left(t + \left(t + t^3\right)y^2\right)e^{t^2y^2} + \left(t^2 + t^4\right)ye^{t^2y^2}\frac{dy}{dt} = 0,$$

que é uma equação exacta; equivalente a

$$\left(1 + t^2\right)e^{t^2y^2} = c.$$

onde c é uma constante arbitrária. Usando a condição inicial obtém-se

$$y(t) = \frac{1}{t}\sqrt{\log\frac{2e}{1 + t^2}} \quad para \quad t \in \left]0, \sqrt{2e - 1}\right[.$$

22.1.6 Equações lineares e separáveis como casos particulares

Equações separáveis: Dada uma equação separável

$$\frac{dy}{dt}=\frac{g(t)}{f(y)},$$

é natural escreve-la na forma

$$g(t)-f(y)\frac{dy}{dt}=0,$$

que é uma equação exacta da forma $M+N\frac{dy}{dt}=0$,com $M=g(t)\quad \text{e} \quad N=-f(y)$. De facto $\frac{\partial M}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial t}$. Deteminando φ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}=M=g(t)\quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=N=-f(y)$, obtemos a menos de uma constante aditiva $\varphi=G(t)-F(y)$, onde G é uma primitiva de g e F é uma primitiva de f. Portanto as soluções são dadas (como já sabíamos) por $G(t)-F(y)=c$, onde c é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais.

Equações lineares: Dada uma equação linear

$$\frac{dy}{dt}+a(t)\,y=b(t)\,,$$

é natural escreve-la na forma

$$a(t)\,y-b(t)+\frac{dy}{dt}=0,$$

que é uma equação da forma $M+N\frac{dy}{dt}=0$, com $M=a(t)\,y-b(t)\quad \text{e} \quad N=1$. Portanto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}=a(t)\,.$$

Pelo que a equação tem um factor de integração que só depende da variável t e que é solução de $\frac{d\mu}{dt}=a(t)\,\mu$ (com já era do nosso conhecimento).