23 ª Aula 2004.11.08 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

23.1 Mudanças de variáveis

Para além da utilização judiciosa de factores de integração outros métodos particularíssimos podem ser usados, em especial a utilização de diferentes variáveis. De facto a consideração de certas mudanças de variáveis é clássica na resolução de certos tipos de equações.

23.1.1 Equação de Bernoulli

Dadas as funções (contínuas num certo intervalo) $a(t)$ e $b(t)$, considere-se a seguinte equação não linear (para n inteiro diferente de 0 e 1, casos em que a equação seria linear)

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)\,y^n.$$

Dada uma solução $y(t)$ desta equação, considere-se a função

$$u(t) = \frac{1}{y^{n-1}(t)}.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1-n}{y^n}\frac{dy}{dt} = \frac{1-n}{y^n}\left(b(t)\,y^n - a(t)\,y\right) \\ &= (1-n)\,b(t) - a(t)\,\frac{1-n}{y^{n-1}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{du}{dt} + (1-n)\,a(t)\,u = (1-n)\,b(t)\,.$$

Obteve-se assim uma equação diferencial linear para a função $u(t)$.

Exemplo 23.1 *Vamos determinar a solução geral de*

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2t} - \frac{ty^3}{2}.$$

Fazendo $u = \frac{1}{y^2}$ *(para* $y \neq 0$*), obtemos*

$$\frac{du}{dt} = \frac{-2}{y^3}\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{y^3}\left(-\frac{y}{2t} - \frac{ty^3}{2}\right) = \frac{1}{t}\frac{1}{y^2} + t = \frac{1}{t}u + t$$

Resolvendo esta equação (que admite uma factor de integração tal que $\mu' = -\frac{1}{t}\mu$*, por exemplo* $\mu = \frac{1}{t}$*) obtemos sucessivamente (para* $t \neq 0$*)*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{1}{t}u = t \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \frac{1}{t^2}u = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{t}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{u}{t} = t + c \\ &\Leftrightarrow \quad u = t^2 + ct, \end{aligned}$$

donde se obtêm as soluções (por $y^2 = \frac{1}{u}$; $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{u}}$)

$$y(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{t^2 + ct}}$$

onde c é uma constante arbitrária. Por outro lado facilmente se vê que a função constante $y(t) \equiv 0$ também é solução da equação original. Pelo que se pode mostrar que a solução geral desta equação é [1]

$$y(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{t^2 + ct}} \quad ou \quad y(t) \equiv 0.$$

23.1.2 Equações homogéneas

Designam-se por equações diferênciais homogéneas as equações da forma

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Dada uma solução $y(t)$ desta equação, considere-se a função

$$u(t) = \frac{y(t)}{t}.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{-y}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{-y}{t^2} + \frac{1}{t} f\left(\frac{y}{t}\right), \end{aligned}$$

e portanto obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}\left(f(u) - u\right)$$

que pode ser encarada como uma equação diferencial separável para u.

[1] Note-se que se tivermos a condição inicial $y(t_0) = y_0$ (com $t_0 \neq 0$), vem $c = \frac{1}{t_0 y_0^2} - t_0$;

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + ct} &= \sqrt{t^2 + \frac{t}{t_0 y_0^2} - t_0 t} \\ &= \frac{1}{|y_0|}\sqrt{\frac{t}{t_0}\left(y_0^2 t_0 (t - t_0) + 1\right)} \end{aligned}$$

e

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{\frac{t}{t_0}\left(y_0^2 t_0 (t - t_0) + 1\right)}}$$

fica de forma unificada a solução geral da equação.

Exemplo 23.2 *Vamos determinar a solução geral de*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}\left(2ty + y^2\right).$$

Note-se que

$$\frac{1}{t^2}\left(2ty + y^2\right) = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

pelo que esta equação é homogénea. Fazendo $u = \frac{y}{t}$ *(para* $t \neq 0$*), obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t^2} \\ &= \frac{1}{t}\left(2u + u^2\right) - \frac{1}{t}u \\ &= \frac{1}{t}\left(u + u^2\right) \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação separável obtemos sucessivamente (para $u \neq 0$, $u \neq -1$ *e* $t \neq 0$*)*

$$\begin{aligned} \frac{1}{u+u^2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\log|u| - \log|1+u|\right) = \frac{1}{t} \\ &\Leftrightarrow \log\frac{|u|}{|1+u|} = \log t + c \\ &\Leftrightarrow \frac{u}{1+u} = \pm e^c t \\ &\Leftrightarrow u = \frac{\pm e^c t}{1 \mp e^c t} \end{aligned}$$

donde se obtêm as soluções (por $y = tu$*)*

$$y(t) = \frac{kt^2}{1-kt}$$

onde k *é uma constante arbitrária não nula. Por outro lado facilmente se vê que as funções constantes* $u(t) \equiv 0$ *e* $u(t) \equiv -1$ *também é soluções da equação separável. Pelo que se pode mostrar que a solução geral da a equação original é* [2]

$$y(t) = \frac{kt^2}{1-kt} \quad ou \quad y(t) \equiv -t.$$

onde k *é uma constante real arbitrária.*

[2] Note-se que se tivermos a condição inicial $y(t_0) = y_0$ (com $t_0 \neq 0$), vem $k = \frac{y_0}{t_0(t_0+y_0)}$ e

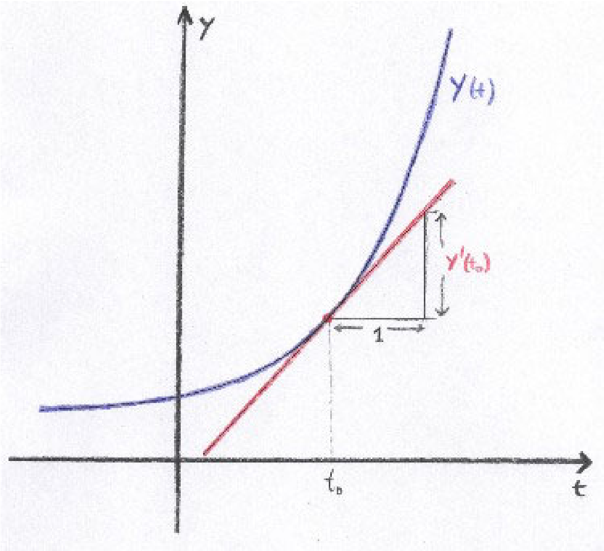
$$y(t) = \frac{y_0 t^2}{t_0^2 - y_0(t - t_0)}$$

fica de forma unificada a solução geral da equação.

23.2 Traçado de campos de direcções

23.2.1 Interpretação geométrica de uma equação diferencial

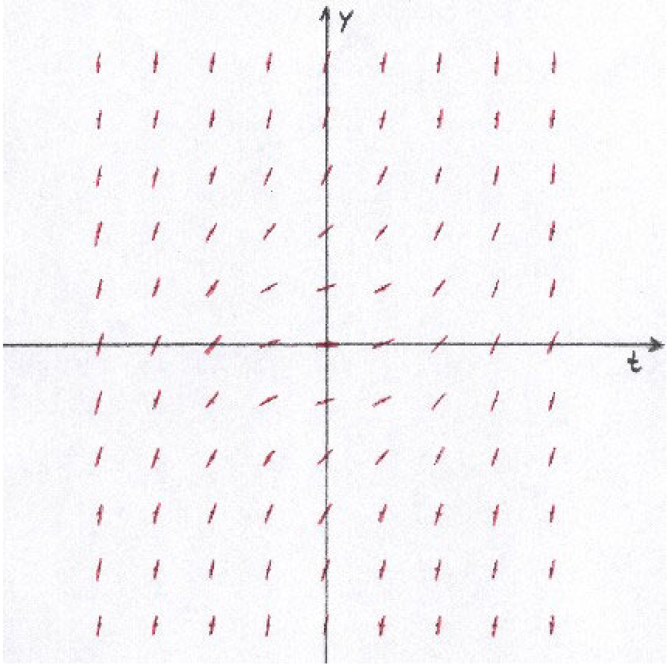
Como se indica num gráfico de uma função $y(t)$ o valor da derivada desta função num certo ponto t_1? Pela inclinação da recta tangente (tendo esta a direcção do vector $\left(1, \frac{dy}{dt}(t_1)\right)$ e passando pelo ponto $t_1, y(t_1)$).



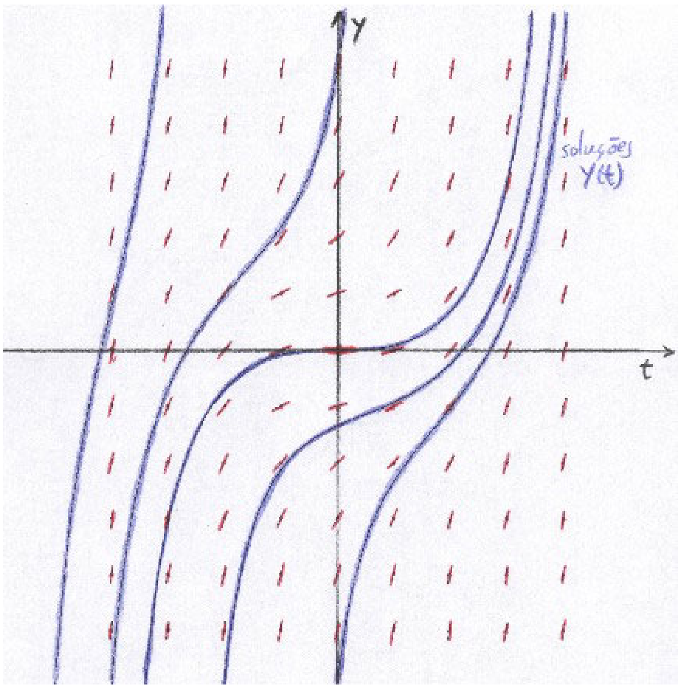
Uma equação diferencial (ordinária, escalar de 1ª ordem), que se pode descrever na forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

define então um **campo de direcções** $(t, y) \to (1, f(t, y))$ ou seja $(t, y) \to \left(1, \dfrac{dy}{dt}\right)$ que pode se representado graficamente; traçando um pequeno segmento com a inclinação $f(t, y)$ em cada ponto (t, y) de um reticulado:



As soluções da equação diferencial são funções tangentes a este campo; o gráfico de cada solução tem cada ponto uma recta tangente com a direcção determinada pelo campo de direcções.



23.2.2 Representação gráfica de campos de direcções

Com a ajuda de um computador é fácil representar graficamente um campo de direcções, construindo um reticulado e marcando em cada vértice deste um pequeno segmento de recta com a direcção calculada para esse ponto. No entanto, é possível obter uma boa aproximação gráfica dum campo de direcções, sem a necessidade de realizar uma grande quantidade de cálculos como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo Considere-se a equação

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t^2$$

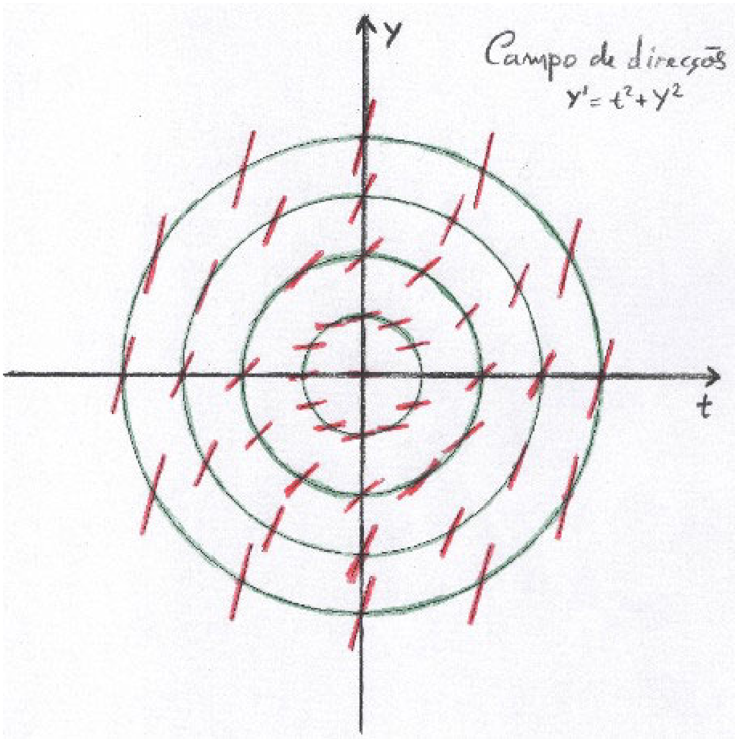
(uma equação que não pode ser resolvida através dos métodos que aprendemos e que não tem solução elementar).

A ideia é representar, como curvas auxiliares, as linhas aonde o campo de direcções é constante igual a um valor dado.

Represente-se por exemplo, as curvas aonde o campo tem inclinação igual a $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{9}{4}$ e 4:

$$y^2 + t^2 = \frac{1}{4}, \quad y^2 + t^2 = 1, \quad y^2 + t^2 = \frac{9}{4}, \quad y^2 + t^2 = 4.$$

Podemos agora sobre estas curvas marcar pequenos segmentos de recta com inclinações $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{9}{4}$ e 4, respectivamente:



Desenhando curvas tangentes a este campo, podemos ter uma ideia sobre o gráfico das soluções da equação diferencial: