

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

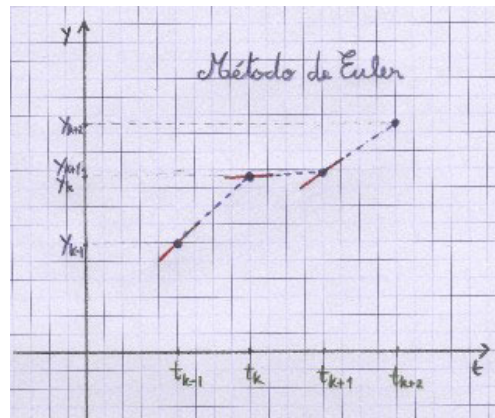
## 24.1 Método de Euler na aproximação de EDO's

Métodos numéricos para a determinação de soluções de EDO's podem ser analisados nesta representação geométrica (campo de direcções). O método mais ingénuo, mas eficaz em inúmeras situações, é o Método de Euler:

Considera-se um PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0.$$

Definem-se os tempos  $t_k = t_0 + kh$ , onde  $h > 0$  é um passo constante e  $k$  um inteiro. Pretende-se calcular valores aproximados  $y_k$  do valor da solução  $y(t_k)$ . Conhecido o par  $(t_k, y_k)$ , aproxima-se o gráfico da solução  $y(t)$  no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  por um segmento de recta com inclinação dada por  $f(t_k, y_k)$ .



O valor aproximado  $y_{k+1}$  pode então ser calculado por

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k).$$

A sequência  $y_k$  é assim obtida por recorrência. Os pontos  $\{(t_k, y_k) : k = 0, 1, \dots, N\}$  serão então uma aproximação (discreta) do gráfico da solução procurada  $\{(t, y(t)) : t \in [0, Nh]\}$ .

## 24.2 Problema da existência e unicidade

### 24.2.1 Exemplo 1 (inexistência)

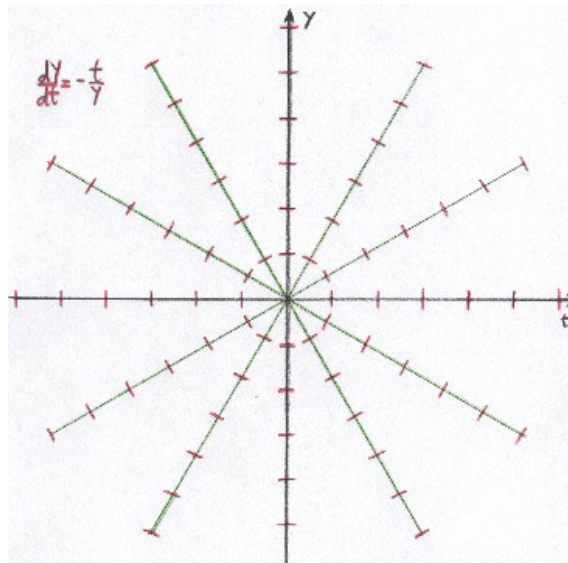
Considere-se a equação diferencial

$$y \frac{dy}{dt} = -t.$$

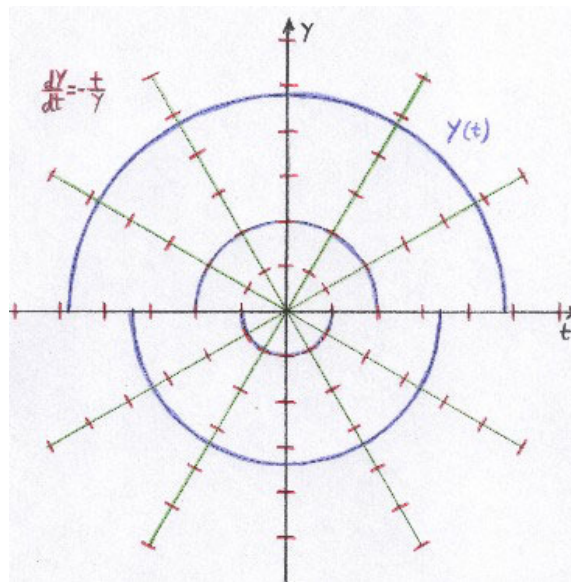
Para  $y \neq 0$ , temos  $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$ . As curvas aonde o campo de direcções é constante igual a  $m$ , são as rectas que passam na origem

$$y = -\frac{1}{m}t.$$

obtemos assim o seguinte esboço do campo de direcções:



e podemos ter uma ideia das soluções:



Facilmente confirmamos estas figuras uma vez que a equação dada é separável e as soluções  $y(t)$  satisfazem a  $y^2 + t^2 = c$ , obtendo-se as soluções  $y(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$ .

Verificamos que o problema

$$y \frac{dy}{dt} = -t \quad \text{com} \quad y(1) = 0,$$

não tem nenhuma solução definida num intervalo aberto que contenha o instante inicial  $t_0 = 1$  (embora se possa pensar numa função definida em  $[-1, 1]$  generalizando o conceito de solução). E que o problema

$$y \frac{dy}{dt} = -t \quad \text{com} \quad y(0) = 0,$$

também não tem solução (não sendo possível, neste caso, generalizar o conceito de solução).

**24.2.2 Exemplo 2 (multiplicidade de soluções)**

Considere-se o problema

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{|1 - y^2|} \quad \text{com} \quad y(0) = -1.$$

Facilmente se descobre a solução  $y(t) \equiv -1$ . Mas será que esta solução é única?

Para simplificar esta análise considere-se  $|y| \leq 1$  e portanto a equação:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - y^2}$$

Para condições iniciais tais que  $y \neq -1$  e  $y \neq 1$  obtemos:  $\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{dy}{dt} = 1$ . Donde

$$\arcsen y = t + c \quad \text{para} \quad (t + c) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

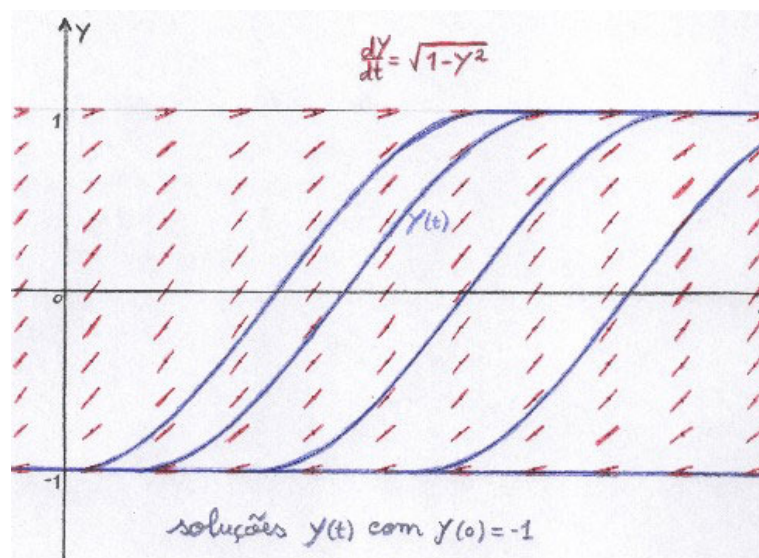
$$y = \text{sen}(t + c) \quad \text{para} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right].$$

Mas esta solução não explode para  $t = -\frac{\pi}{2} - c$  ou  $t = \frac{\pi}{2} - c$ , pelo que pode ser prolongada. Obtemos então as seguintes soluções

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \leq -\frac{\pi}{2} - c \\ \text{sen}(t + c) & \text{se } -\frac{\pi}{2} - c \leq t \leq \frac{\pi}{2} - c \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} - c \leq t \end{cases}$$

Pelo que existem infinitas soluções do nosso problema; basta tomar na expressão acima qualquer  $c \leq -\frac{\pi}{2}$  para obtermos uma solução da equação diferencial que satisfaz  $y(0) = -1$ .

Façamos um esboço do campo de direcções e das soluções:



### 24.3 Teorema de Picard-Lindelöf

**Teorema 24.1 (de Picard-Lindelöf)** *Seja  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  um conjunto aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(t_0, y_0) \in D$ , tais que*

a)  *$f$  é contínua em  $D$*

b)  *$f(t, y)$  é localmente lipschitziana em relação a  $y$  em  $D$ .*

*I. e. , para cada ponto  $(t, y) \in D$  existe uma vizinhança  $V$  de  $(t, y)$  e  $L > 0$  tal que para quaisquer pontos  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  pertencentes<sup>1</sup> a  $V$*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

*Então o seguinte problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

*tem uma única solução  $y(t)$  e esta está definida numa vizinhança<sup>2</sup> de  $t_0$ .*

A próxima proposição mostra que a condição b) no Teorema de Picard-Lindelöf, pode ser substituída por outra menos geral, mas de mais fácil de verificação prática. Em particular, se  $f(t, y)$  é de classe  $C^1$  em  $D$ , então está nas condições do Teorema.

**Proposição 24.2** *Se  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$  é uma função contínua num aberto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , então  $f(t, y)$  é localmente lipschitziana em relação a  $y$  em  $D$ .*

**Demonstração.** Dado  $(t, y) \in D$ , seja  $V$  uma vizinhança limitada de  $(t, y)$  tal que  $\bar{V} \subset D$ . Como  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua, tem um máximo em no compacto  $\bar{V}$ . Então pelo teorema do valor intermédio (a uma variável -  $y$ ) temos para  $(t, y_1), (t, y_2) \in \bar{V}$ , com  $\theta \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_1 + \theta(y_1 - y_2)) \right| |y_1 - y_2| \\ &\leq \max_{\bar{V}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Portanto, para cada ponto  $(t, y) \in D$  existe uma vizinhança  $V$  de  $(t, y)$  e  $L = \max_{\bar{V}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$  tal que para quaisquer pontos  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  pertencentes a  $V$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

■

<sup>1</sup>Note-se que  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  têm a mesma primeira coordenada.

<sup>2</sup>I.e. definida pelo menos para  $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ , para certo  $\varepsilon > 0$ .

### 24.3.1 Demonstração da existência

O Teorema de Picard-Lindelöf contém duas afirmações: a existência da solução e a sua unicidade. Vamos começar por demonstrar a existência construindo explicitamente a solução como o limite de uma sucessão de funções.

**Construção da sucessão  $y_n(t)$ :** Começemos por reparar que o PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0, \quad (24.1)$$

é equivalente à seguinte equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (24.2)$$

Ou seja,  $y(t)$  é uma solução contínua de (24.1) sse é uma solução contínua de (24.2). Note-se que uma solução contínua de qualquer dos problemas é uma função continuamente diferenciável (i. e. de classe  $C^1$ ). De facto se  $y(t)$  é contínua, então por composição de funções contínuas temos que  $f(t, y(t))$  é contínua; pelo que  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  é contínua, e  $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$ , sendo o integral indefinido de uma função contínua, tem derivada contínua.

Defina-se por recorrência a seguinte sequência de funções  $y_n(t)$ :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que  $y_n(t)$  converge uniformemente em  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , para certo  $\varepsilon > 0$  que depende das características da função  $f$ .

**Convergência uniforme da sucessão  $y_n(t)$ :** Uma vez que  $f$  é localmente lipschitziana, seja  $\delta > 0$  e  $L > 0$  tais que  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D$ , e para quaisquer pontos  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  pertencentes a  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  se tenha

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Sendo  $f$  uma função contínua, podemos concluir que existe o máximo da função  $|f(t, y)|$  no quadrado  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  que designaremos pela letra  $M$ . Defina-se então  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\varepsilon < \delta$ ,  $\varepsilon M < \delta$  e  $\varepsilon L < 1$ .

Então podemos mostrar por indução que cada uma das funções  $y_n(t)$  satisfaz a relação  $|y_n(t) - y_0| < \delta$ , se  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . De facto esta propriedade é obviamente verdadeira para  $y_0(t)$ ; e supondo por hipótese de indução a sua veracidade para  $y_n(t)$ , obtemos (porque sabemos que  $|y_n(t) - y_0| < \delta$  para  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ )

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s))| \, ds \right| \leq |t - t_0| M \leq \varepsilon M \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n+1}(s)) ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s))) ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t |y_{n+1}(s) - y_n(s)| ds \right| \\ &\leq L |t - t_0| \max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|, \end{aligned}$$

onde  $I$  designa o intervalo  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Vem então

$$\max_{t \in I} |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| \leq L\varepsilon \max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|,$$

e por indução obtemos

$$\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq (L\varepsilon)^n \max_{t \in I} |y_1(t) - y_0(t)|.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|} \leq L\varepsilon < 1,$$

e concluímos (pelo critério da raiz e pelo critério de Weierstrass) que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)),$$

é uniformemente convergente. Mas, nesse caso, o seguinte limite existe e a sua convergência é uniforme em  $I$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)).$$

**Conclusão:** Uma vez que a sucessão  $y_n(t)$  é uniformemente convergente, digamos  $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$ , concluímos que a função limite  $y(t)$  é contínua.

Por outro lado, como  $(t, y_n(t))$  está numa vizinhança de  $(t_0, y_0)$  quando  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , temos

$$|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))| \leq L |y_n(t) - y(t)|,$$

(usando a propriedade de  $f$  ser localmente lipschitziana,  $\varepsilon > 0$  foi escolhido suficientemente pequeno de forma que tal acontecesse). Pelo que a convergência  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_n(t)) = f(t, y(t))$  também é uniforme em  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Então, podemos comutar a operação de limite com a integração, obtendo-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right) = y_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, y_n(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Pelo que  $y(t)$  é solução do problema (24.2), e portanto, a solução do PVI (24.1) que queríamos demonstrar que existia.