

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

27.1 Soluções do sistema homogéneo

Teorema 27.1 *Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ (constante), $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Então o seguinte problema de valor inicial*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

tem uma única solução $\mathbf{y}(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ que pode ser calculada pela fórmula

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0.$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 26.3 e o Corolário 26.4 temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) &\Leftrightarrow \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) - \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t)) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t_0) \end{aligned}$$

■

Observação 27.1 *O Teorema 27.1 (e a sua demonstração) mantém-se inalterado se substituirmos $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ por $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{C}^n$. Obtendo-se portanto, uma única solução $\mathbf{y}(t)$ com valores em \mathbb{C}^n definida para todo o $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 27.1 *Considere-se o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{com} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o Teorema anterior e com o exemplo 26.3 a solução é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & \frac{1}{2}(e^{2(t-t_0)} - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_0 e^{2(t-t_0)} + \frac{y_0}{2}(e^{2(t-t_0)} - 1) \\ y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{y_0}{2}\right) e^{2(t-t_0)} - \frac{y_0}{2} \quad e \quad y(t) = y_0$$

Corolário 27.2 *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes $n \times n$ tais que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Então*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{e}^{\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}.$$

Demonstração. *Comecemos por notar que da definição de $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ e de $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ se obtém $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$. Dado \mathbf{v} um vector qualquer de dimensão n e defina-se $\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v}$ e $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{e}^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\mathbf{v}$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} + \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{y}, \end{aligned}$$

tal como

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\tilde{\mathbf{y}}.$$

Uma vez que $\mathbf{y}(0) = \tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{v}$, pela unicidade de solução vem

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} = \mathbf{e}^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\mathbf{v},$$

como esta igualdade é verificada para todo o vector \mathbf{v} , obtemos a igualdade matricial

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}.$$

■

Corolário 27.3 *Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$. Para quaisquer reais t e s tem-se*

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{s\mathbf{A}} = \mathbf{e}^{(t+s)\mathbf{A}}.$$

Demonstração. *Basta aplicar o Corolário 27.2 para as matrizes $t\mathbf{A}$ e $s\mathbf{A}$. ■*

Teorema 27.4 *Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ (constante). Então as soluções da equação diferencial*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

constituem um espaço linear de dimensão n .

Demonstração. *Sejam \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 duas soluções da equação e α_1 e α_2 dois escalares; então $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ é ainda uma solução da mesma equação, de facto*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y} &= \alpha_1 \frac{d}{dt}\mathbf{y}_1 + \alpha_2 \frac{d}{dt}\mathbf{y}_2 \\ &= \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{y}_2 \\ &= \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Pelo que as soluções constituem um subespaço linear (do espaço das funções definidas em \mathbb{R} e com valores em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n). Para concluirmos que a dimensão deste subespaço é n basta verificar que para quaisquer soluções $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_j$ e para quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_j$, temos de acordo com o Teorema 27.1 que

$$e^{-t\mathbf{A}} (\alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{y}_2(t) + \dots + \alpha_j \mathbf{y}_j(t)) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(0) + \alpha_2 \mathbf{y}_2(0) + \dots + \alpha_j \mathbf{y}_j(0).$$

Portanto as soluções $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t) \dots \mathbf{y}_j(t)$ são linearmente independentes sse os vectores (de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) $\mathbf{y}_1(0), \mathbf{y}_2(0) \dots \mathbf{y}_j(0)$ também o forem. ■

27.2 Soluções dadas por vectores e valores próprios

Proposição 27.5 Um vector \mathbf{v} é um vector próprio da matriz quadrada \mathbf{A} correspondente ao valor próprio λ sse $\mathbf{y}(t) = e^{t\lambda} \mathbf{v}$ é uma solução não trivial de $\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$.

Demonstração. Basta notar que

$$\frac{d}{dt} (e^{t\lambda} \mathbf{v}) = \mathbf{A} (e^{t\lambda} \mathbf{v}) \Leftrightarrow \lambda e^{t\lambda} \mathbf{v} = e^{t\lambda} \mathbf{A} \mathbf{v} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}.$$

■

Proposição 27.6 Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ de *entradas reais*. Então $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ é uma solução de $\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ sse $\mathbf{u}(t) = \operatorname{Re} \mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{v}(t) = \operatorname{Im} \mathbf{y}(t)$ são soluções reais da mesma equação.

Demonstração. Se $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ é tal que $\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ então fazendo o complexo conjugado obtemos $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}}$ uma vez que $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Somando as relações anteriores e multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} + \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{A} \frac{1}{2} (\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}.$$

Do modo análogo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} - \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{2i} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{A} \frac{1}{2i} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v},$$

o que prova a condição suficiente.

Por outro lado se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n tais que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad e \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}.$$

então

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} + i \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} + i \mathbf{A} \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{u} + i \mathbf{v}) = \mathbf{A} (\mathbf{u} + i \mathbf{v})$$

o que prova a condição necessária. ■

Exemplo 27.2 Considere-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad \text{com} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para de acordo com a Proposição 27.5 determinarmos uma solução deste sistema, vamos calcular os valores próprios da matriz \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \pm i \end{aligned}$$

Determinemos um vector próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = 1 + i$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (1+i) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Leftrightarrow X - Y = (1+i)X \Leftrightarrow Y = -iX$$

Por exemplo $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Então $\mathbf{y} = e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ é solução do sistema. Ou seja

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t (\cos t + i \sin t) \\ e^t (\sin t - i \cos t) \end{bmatrix}$$

De acordo com a Proposição 27.6

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} e^t \sin t \\ -e^t \cos t \end{bmatrix}$$

são soluções (reais) do sistema. Então de acordo com o Teorema 26.7 temos que a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Mas de acordo com o Teorema 26.4 também é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Comparando estas expressões, primeiro com $t = 0$ e depois com t qualquer, concluímos que $c_1 = x_0$; $c_2 = -y_0$ e depois que

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$