28 ª Aula 2004.11.19 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

28.1 Exponencial de matrizes semelhantes

Proposição 28.1 *Se* $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$ *onde* $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{J}$ *são matrizes* $n \times n$ [1], *(com* $\det \mathbf{S} \neq 0$*), então*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{J}\mathbf{S}^{-1}$$

Demonstração. *Temos* $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$, *donde*

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{SJS}^{-1}\mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{SJ}^2\mathbf{S}^{-1} \quad ; \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{SJ}^2\mathbf{S}^{-1}\mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{SJ}^3\mathbf{S}^{-1} \quad \ldots$$

e por indução

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{SJ}^k\mathbf{S}^{-1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. *Então*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{SJ}^k\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{J}^k\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{J}\mathbf{S}^{-1}$$

■

28.2 Exponencial de matrizes diagonalizáveis

Sabemos da Álgebra Linear que muitas matrizes são diagonalizáveis; ou seja é frequente a situação em que dada uma matriz $\mathbf{A}$ é possível calcular uma matriz mudança de base $\mathbf{S}$ e uma matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ tais que $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$. Pela Proposição 28.1, podemos então calcular a matriz $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ desde que saibamos calcular $\mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}}$. Mas como vamos ver de seguida, é trivial o cálculo da exponencial de uma matriz diagonal.

Considere-se uma matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por simples verificação, obtemos que o seu quadrado é ainda uma matriz diagonal em que as entradas são o quadrado das da matriz inicial:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

[1] Ou dito com outra terminologia: se as matrizes A e B são semelhantes.

Por indução concluímos que a potência k de uma matriz diagonal se obtém de forma semelhante:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

E de acordo com a definição de exponencial de uma matiz obtemos:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

ou seja, a exponencial de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal em que as entradas (na diagonal) são as exponenciais das entradas correspondentes na matriz original.

Portanto, o cálculo da exponencial de uma matriz diagonalizável $\mathbf{A}$ reduz-se à determinação da matriz diagonal semelhante $\mathbf{\Lambda}$ (cálculo de valores próprios) e da respectiva matriz mudança de base $\mathbf{S}$ (cálculo de vectores próprios). Após a inversão da matriz $\mathbf{S}$, obtemos a exponencial da matriz $\mathbf{A}$ por simples multiplicação de matrizes: $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{S}^{-1}$.

Notação 28.1 *Se* $\mathbf{A}$ *é uma matriz quadrada e* λ *um escalar, escrevemos* $\mathbf{A} - \lambda$ *em vez de (com o mesmo significado de)* $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{Id}$*, onde* $\mathbf{Id}$ *representa a matriz identidade.*

Por exemplo $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Recorde-se da Álgebra Linear que se $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$, então $\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda}$ e se v é uma coluna de $\mathbf{S}$ então satisfaz a relação $\mathbf{A}v = \lambda v$, onde λ é a entrada correspondente (à coluna considerada) da matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$. Uma vez que a matriz $\mathbf{S}$ é invertível concluímos que as colunas $\mathbf{S}$ são vectores próprios linearmente independentes da matriz $\mathbf{A}$. Portanto, $\mathbf{A}$ é matriz $n \times n$ diagonalizável sse possui n vectores próprios linearmente independentes. Por outro lado um par (λ, v) - λ escalar; v vector não nulo - satisfaz a relação $\mathbf{A}v = \lambda v$ sse $(\mathbf{A} - \lambda)\, v = 0$. Como v não pode ser o vector nulo, esta igualdade só pode ser satisfeita se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda) = 0.$$

É esta última igualdade que permite o cálculos dos valores próprios de $\mathbf{A}$. Por fim, dado um valor próprio λ podemos calcular uma vector próprio correspondente resolvendo os sistema degenerado $(\mathbf{A} - \lambda)\, v = 0$.

28.3 Exemplos com matrizes diagonalizáveis

28.3.1 Exemplo-valores próprios reais

Exemplo 28.1 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinação dos valores próprios:

$$\mathbf{A}-\lambda=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\quad e\quad \det(\mathbf{A}-\lambda)=(3-\lambda)^2-1.$$

Valores próprios $\lambda=3\pm1$ *(*$\lambda=2$ *ou* $\lambda=4$*) . Concluímos* $\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ *com* $\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.
As colunas de $\mathbf{S}$ *são vectores próprios de* $\mathbf{A}$.
Vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda=2$*:*

$$\mathbf{A}v=\lambda v\quad ou\ seja\quad \mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\quad ou\ ainda\quad (\mathbf{A}-\lambda)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0.$$

portanto

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\quad donde\quad x+y=0.$$

Só precisamos de um vector próprio; por exemplo $x=1$, $y=-1$*:* $v=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$.

Vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda=4$*:*

$$(\mathbf{A}-4)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\quad ou\ seja\quad \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\quad donde\quad x-y=0.$$

Por exemplo $v=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$*. Determinamos então uma matriz* $\mathbf{S}$ *que satisfaz* $\mathbf{AS}=\mathbf{S\Lambda}$*:*

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

e, invertendo esta matriz $\mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$*. Agora podemos calcular* $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$*:*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2}\\ \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

28.3.2 Exemplo-valores próprios complexos conjugados

Exemplo 28.2 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Determinação dos valores próprios:

$$\det(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda})=0\Leftrightarrow\det\begin{bmatrix}1-\boldsymbol{\lambda} & -1\\ 1 & 1-\boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\boldsymbol{\lambda})^2+1=0$$

Valores próprios $\boldsymbol{\lambda} = 1 \pm i$ ($\lambda = 1 + i$ *ou* $\lambda = 1 - i$) . *Concluímos* $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$ *com*

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

As colunas de $\mathbf{S}$ *são vectores próprios de* $\mathbf{A}$.

Vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda = 1 \pm i$:

$$\mathbf{A}v = \lambda v \quad \textit{ou seja} \quad (\mathbf{A} - \lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \textit{ou ainda}$$

$$\begin{bmatrix} 1-(1\pm i) & -1 \\ 1 & 1-(1\pm i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \textit{donde} \quad \mp ix - y = 0.$$

Só precisamos de um vector próprio para cada valor próprio: por exemplo $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ *associado ao valor próprio* $\lambda = 1 + i$ *e* $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ *associado ao valor próprio* $\lambda = 1 - i$. *Determinamos então uma matriz* $\mathbf{S}$ *que satisfaz* $\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

e, invertendo esta matriz $\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$. *Agora podemos calcular* $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & ie^{it} \\ e^{-it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{it} - ie^{-it} \\ -ie^{it} + ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} & i\dfrac{e^{it} - ie^{-it}}{2} \\ -i\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2} & \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

28.4 Critérios para a verificação dos cálculos

Sendo o cálculo de exponenciais de matrizes muitas vezes intricado, convém ter critérios simples de verificação dos resultado. Dois critérios que são muito úteis na prática são os que expressos nas seguintes igualdades:

$$\left[\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\right]_{t=0} = \mathbf{Id} \quad \text{e} \quad \left[\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\right]_{t=0} = \mathbf{A}.$$

Por outro lado sempre que se calcula a inversa $\mathbf{S}^{-1}$ de uma matriz $\mathbf{S}$, convém verificar imediatamente que o resultado obtido é correcto através da igualdade $\mathbf{SS}^{-1} = \mathbf{Id}$.

28.5 Exponencial de matrizes formadas por blocos.

Exemplo 28.3 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se reconhece que o que se passa com a primeira e segundas colunas e linhas é independente do que se passa com as duas últimas linhas e colunas, do ponto de vista da multiplicação e soma de matrizes; espaços próprios etc... Diz-se neste caso que a matriz $\mathbf{A}$ *é formada por blocos sobre a diagonal, sendo estes blocos, neste exemplo, as matrizes* 2×2*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sendo assim podemos usar os dois últimos exemplos para obter imediatamente:

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \operatorname{sen} t & 0 & 0 \\ e^t \operatorname{sen} t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} \end{bmatrix}.$$

De facto quando temos uma matriz $\mathbf{A}$ quadrada $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ formada pelos blocos $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ sobre a diagonal, onde $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ são matrizes quadradas $n_1 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$ respectivamente:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{B}_1} & 0 \quad \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{B}_2 \\ \vdots & \end{array}\right],$$

obtemos

$$\mathbf{A}^2 = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{B}_1^2} & 0 \quad \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{B}_2^2 \\ \vdots & \end{array}\right] \quad \text{e em geral} \quad \mathbf{A}^k = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{B}_1^k} & 0 \quad \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{B}_2^k \\ \vdots & \end{array}\right];$$

portanto

$$e^{t\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{e^{t\mathbf{B}_1}} & 0 \quad \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & e^{t\mathbf{B}_2} \\ \vdots & \end{array}\right]$$

Da mesma forma para matrizes formadas por mais blocos sobre a diagonal:

$$\text{Se } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{B}_2} & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \boxed{\mathbf{B}_j} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \end{bmatrix}, \text{ então } \quad e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \boxed{e^{t\mathbf{B}_1}} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{e^{t\mathbf{B}_2}} & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \boxed{e^{t\mathbf{B}_j}} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Note-se que alguns deste blocos podem ser unidimensionais (matrizes 1×1); i. e. números.

28.6 Matrizes não diagonalizáveis

Considere–se o seguinte exemplo:

Exemplo 28.4 *Vamos determinar os valores e vectores próprios da matriz:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 .$$

Pelo que a matriz $\mathbf{A}$ *só tem um valor próprio* $\lambda = 2$*. Calculando os vectores próprios* $\mathbf{v}$ *obtemos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \textit{donde} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde α *é um escalar não nulo arbitrário. Portanto todos os vectores próprios têm a direcção dada pelo vector* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ *pelo que a dimensão do espaço próprio é* 1 *(número máximo de vectores próprios linearmente independentes). Não existindo dois vectores próprios linearmente independentes, concluímos que a matriz* $\mathbf{A}$ *não é diagonalizável.*

Como existem matrizes não diagonalizáveis o procedimento para o cálculo da exponencial de uma matriz que descrevemos anteriormente tem de ser generalizado para estas matrizes. A ideia é ainda utilizar a Proposição **28.1**, mas alargando a classe de matrizes $\mathbf{J}$ para as quais sabemos calcular imediatamente a sua exponencial. Com este objectivo vamos definir uma classe simples de matrizes cuja exponencial seja facilmente apreendida. Esta classe clássica de matrizes que vamos introduzir é designada por formas canónicas de Jordan; são matrizes formadas por blocos sobre a diagonal, sendo cada um destes blocos uma matriz simples designada por bloco de Jordan.

28.7 Blocos de Jordan.

Dá-se o nome de bloco de Jordan de dimensão n a uma matriz J_λ quadrada $n \times n$ da forma:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Portanto bloco de Jordan J_λ de dimensão n é uma matriz quadrada $n \times n$ que tem as entradas da diagonal todas iguais a um certo valor λ (que pode ser nulo), todas as entradas da diagonal superior com o valor 1 e todas as outras entradas nulas. Simbolicamente:

$$J_\lambda = [j_{i,k}]_{i,k=1,\dots,n} \qquad \text{com} \qquad j_{i,k} = \begin{cases} \lambda & \text{se} \quad i = k \\ 1 & \text{se} \quad i = k-1 \\ 0 & \text{nos} \quad \text{restantes casos} \end{cases}$$

Exemplo 28.5

- $[3]$ *é um bloco de Jordan de dimensão 1 (J_3).*
- $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *é um bloco de Jordan de dimensão 3 (J_4).*
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é um bloco de Jordan de dimensão 2 (J_0).*

28.8 Matrizes na forma canónica de Jordan.

Uma matriz quadrada J é uma matriz na forma canónica de Jordan se é formada exclusivamente por blocos de Jordan sobre a diagonal:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & 0 & \cdots & & \cdots\ 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_{\lambda_2}} & & 0 & \cdots\ \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots\ \cdots & 0 & \boxed{J_{\lambda_j}} & \\ 0 & 0 & \cdots\ \cdots & 0 & & \end{bmatrix}$$

onde J_{λ_1}, J_{λ_2},..., J_{λ_j} são blocos de Jordan.

Exemplo 28.6

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*

- *Mas a matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ***não está*** *na forma canónica de Jordan.*

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 2 blocos de Jordan.*

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 2 blocos de Jordan.*

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*

- *Mas a matriz* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ***não está*** *na forma canónica de Jordan.*

- *Mas a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ***não está*** *na forma canónica de Jordan.*

Pode-se mostrar com base exclusivamente em considerações algébricas o seguinte teorema (consultar um livro de álgebra linear para a difícil demonstração deste resultado).

Teorema 28.2 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada qualquer. Então existe uma matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1},$$

onde $\mathbf{J}$ *é uma matriz na forma canónica de Jordan formada por* j *blocos de Jordan* J_{λ_1}, J_{λ_2},..., J_{λ_j}; j *é a dimensão do espaço próprio (número máximo de vectores próprios linearmente independentes) da matriz* $\mathbf{A}$ *e* λ_1, λ_2 ...λ_j *os seus valores próprios (todos).*

Observação 28.1 *Note-se que* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{J}$ *têm o mesmo polinómio característico. De facto*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}-\lambda) &= \det\left(\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}-\lambda\right) = \det\left(\mathbf{S}(\mathbf{J}-\lambda)\mathbf{S}^{-1}\right) \\ &= \det \mathbf{S} \det(\mathbf{J}-\lambda) \det \mathbf{S}^{-1} = \det(\mathbf{J}-\lambda) \\ &= (\lambda_1-\lambda)^{n_1}(\lambda_2-\lambda)^{n_2}\dots(\lambda_j-\lambda)^{n_j} \end{aligned}$$

onde n_1, n_2 ...n_j *são as dimensões dos blocos* J_{λ_1}, J_{λ_2},..., J_{λ_j} *respectivamente. Note-se ainda que se pode ter* $\lambda_a = \lambda_b$ *para índices distintos* $a \neq b$ *e que* $n_1 + n_2 + \cdots + n_j = n$, *sendo* n *a dimensão da matriz* $\mathbf{A}$ *(todas as matrizes* $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{J}$ *são* $n \times n$*).*

28.9 Exponencial de Blocos de Jordan.

Vamos mostrar em apêndice, que para um bloco de Jordan J_λ de dimensão n temos

$$e^{J_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Concretizando para dimensão 4, o que pode ser feito através de um cálculo directo, concluí-se que exponencial de um bloco de Jordan (neste caso de dimensão 4)

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ é dado pela seguinte expressão: } e^{J_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 28.7 *Se* J *é a matriz na forma canónica de Jordan*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \textit{ então } e^{tJ} \textit{ é dado por } e^{tJ} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2!}e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

28.10 Exemplos.

Exemplo 28.8 *Considere-se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases} \quad \textit{com} \quad x(0) = \pi \quad e \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$*.Calculando os seus valores próprios obtemos*

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}) = \det\left[\begin{smallmatrix} 3-\boldsymbol{\lambda} & 1 \\ -1 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{smallmatrix}\right] = (3-\boldsymbol{\lambda})(1-\boldsymbol{\lambda}) + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2)^2.$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ *é semelhante a uma das seguintes formas canónicas*[2] $\mathbf{J} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ *ou* $\mathbf{J} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. *A primeira com dois blocos e a segunda com um bloco de Jordan.*

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$*:* $\mathbf{Av} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{v} = \mathbf{0}$, *facilmente concluímos que* $\mathbf{v}$ *é múltiplo de* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, *pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designe-se então por $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *as colunas da matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que* $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. *Obtemos* $\mathbf{Av}_1 = 2\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, *ou seja* $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ *e* $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. *Podemos escolher*

$$\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \ \textit{e (uma vez feita esta escolha)}\ \mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$

Pelo que podemos tomar $\mathbf{S} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. *Então*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] = e^{2t}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] \\ &= e^{2t}\left[\begin{smallmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{smallmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\pi(1+t) + \sqrt{2}\,t\right)e^{2t} \\ \left(-\pi t + (1-t)\sqrt{2}\right)e^{2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 28.9 *Considere-se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = 3y - z \\ z' = y + z \end{cases} \quad \textit{com} \quad x(0) = y(0) = 0 \quad e \quad z(0) = 1.$$

[2] A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Calculando os seus valores próprios obtemos*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}) &= \det\begin{bmatrix} 2-\boldsymbol{\lambda} & 0 & 1 \\ 0 & 3-\boldsymbol{\lambda} & -1 \\ 0 & 1 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = (2-\boldsymbol{\lambda})\left((3-\boldsymbol{\lambda})(1-\boldsymbol{\lambda})+1\right) \\ &= (2-\boldsymbol{\lambda})\left(\lambda^2-4\lambda+4\right) = -(\lambda-2)^3. \end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ *é semelhante a uma das seguintes formas canónicas*[3] $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *A primeira com três blocos, a segunda com dois blocos e a terceira com um bloco de Jordan.*

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{Av} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A}-2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, *facilmente concluímos que* $\mathbf{v}$ *é múltiplo de* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designe-se então por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$ *as colunas da matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que* $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. *Obtemos* $\mathbf{Av}_1 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{Av}_3 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ *ou seja*

$$(\mathbf{A}-2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A}-2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad e \quad (\mathbf{A}-2)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e uma vez feita esta escolha vem $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$. *Então*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \beta \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Podemos tomar $\alpha = \beta = 0$. *Portanto*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} t-\frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1-t \end{bmatrix}$$

[3] A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

Exemplo 28.10 *Considere-se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \qquad com \quad x(1) = y(1) = 0 \quad e \quad z(1) = 1.$$

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Calculando os seus valores próprios obtemos*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}) &= \det \begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = (1-\boldsymbol{\lambda})(2-\boldsymbol{\lambda})(3-\boldsymbol{\lambda}) + 2-\boldsymbol{\lambda} \\ &= (2-\boldsymbol{\lambda})((1-\boldsymbol{\lambda})(3-\boldsymbol{\lambda}) + 1) = (2-\boldsymbol{\lambda})\left(\boldsymbol{\lambda}^2 - 4\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{4}\right) = -(\boldsymbol{\lambda}-2)^3. \end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ *é semelhante a uma das seguintes formas canónicas*[4] $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *A primeira com três blocos, a segunda com dois blocos e a terceira com um bloco de Jordan.*

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{Av} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *facilmente concluímos que* $\mathbf{v}$ *é dado por* $\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, *onde* α *e* β *são escalares arbitrários; pelo que apenas temos dois vectores próprios linearmente independentes e portanto só podemos ter dois blocos de Jordan na forma canónica associada, i. e.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designe-se então por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$ *as colunas da matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que* $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. *Obtemos* $\mathbf{Av}_1 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{Av}_3 = 2\mathbf{v}_3$, *ou seja*

$$(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad e \quad (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Para que $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ *possa ter solução, o vector* $\mathbf{v}_1$ *tem de pertencer ao espaço das colunas da matriz* $\mathbf{A} - 2$*; concluímos que* $\mathbf{v}_1$ *tem de ser múltiplo do vector* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Tomemos*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e uma vez feita esta escolha vem $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Uma solução possível é*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim $\mathbf{v}_3$ *tem de ser um vector próprio de* $\mathbf{A}$ *linearmente independente do vector próprio* $\mathbf{v}_1$, *pelo que podemos tomar*

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[4] A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t}&te^{2t}&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\\ &= e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&1\\0&1&1\\1&t&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}1-t&t&t\\0&1&0\\-t&t&1+t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix} = \mathbf{e}^{(t-1)\mathbf{A}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = e^{2(t-1)}\begin{bmatrix}2-t&t-1&t-1\\0&1&0\\1-t&t-1&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(t-1)\,e^{2(t-1)}\\0\\te^{2(t-1)}\end{bmatrix}$$

Observação 28.2 *Note-se que na resolução de um problema linear homogéneo* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, *podemos portanto calcular uma matriz* $\mathbf{J}$ *na forma canónica de Jordan semelhante a* $\mathbf{A}$, *ou seja* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$, *e obter a solução geral*

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{c},$$

sem ter de calcular a matriz $\mathbf{S}^{-1}$, *porque* $\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(0)$ *é um vector constante. A matriz* $\mathbf{M}(t) \equiv \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}$ *é uma **matriz fundamental** da equação* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, *porque satisfaz as propriedades* $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ *e* $\det \mathbf{M}(t) \neq 0$ [5].

Exercício 28.1 *Sendo* $\mathbf{A}$ *uma matriz constante, mostre que se* $\mathbf{M}(t)$ *é uma **matriz fundamental** da equação* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ *(ou seja* $\mathbf{M}(t)$ *é uma função matricial tal que* $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ *e* $\det \mathbf{M}(t) \neq 0$*), então*

$$\mathbf{M}(t)\,\mathbf{M}^{-1}(s) = e^{(t-s)\mathbf{A}}.$$

28.11 Apêndice. Exponencial de Blocos de Jordan.

Vamos mostrar que para um bloco de Jordan J_λ de dimensão n a sua exponencial tem a seguinte expressão

$$e^{J_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}.$$

Considere-se a matriz $\mathbf{G}(1)$ definida por $J_\lambda = \lambda\mathbf{Id} + \mathbf{G}(1)$, portanto

$$\mathbf{G}(1) = \begin{bmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&1&\ddots&\vdots\\0&0&\lambda&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&0&\lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda&0&0&\cdots&0\\0&\lambda&0&\ddots&\vdots\\0&0&\lambda&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

[5] De facto

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{S}e^{t\mathbf{J}} = \frac{d}{dt}\mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$$

e

$$\det \mathbf{M}(t) = \det e^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \det e^{t\mathbf{A}}\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}.$$

e em geral, para $1 \leqslant j$, as matrizes $\mathbf{G}(j)$, (matrizes quadradas $n \times n$ em que as únicas entradas não nulas são uns sobre a j- ésima diagonal superior), definidas por

$$\mathbf{G}(j) = [g_{i,k}(j)]_{i,k=1,\dots,n} \qquad \text{com} \qquad g_{i,k}(j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = k - j \\ 0 & \text{nos} \quad \text{restantes casos} \end{cases}.$$

Em particular $\mathbf{G}(j) = \mathbf{0}$ se $j \geqslant n$. Comecemos por mostrar que (para $1 \leqslant j$)

$$(\mathbf{G}(1))^j = \mathbf{G}(j) \tag{28.1}$$

Obviamente que esta relação está correcta para $j = 1$. Se por hipótese de indução é verdadeira para certo j inteiro, temos que $(\mathbf{G}(1))^{j+1} = \mathbf{G}(j)\,\mathbf{G}(1)$. Pelo que falta provar que $\mathbf{G}(j+1) = \mathbf{G}(j)\,\mathbf{G}(1)$. Verifiquemos então que de facto

$$g_{i,k}(j+1) = \sum_{s=1}^{n} g_{i,s}(j)\, g_{s,k}(1).$$

Ora $g_{i,s}(j)\, g_{s,k}(1)$ é diferente de zero apenas quando $i = s - j$ e $s = k - 1$; portanto $g_{i,k}(j+1)$ é diferente de zero só quando $i = k - (j+1)$ e neste caso $g_{i,k}(j+1) = 1$.

Uma vez demonstrada a relação (28.1), obtemos (onde $\mathbf{G}(0) = \mathbf{Id}$)

$$\begin{aligned}
e^{t\mathbf{G}(1)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{G}(1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{G}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\mathbf{G}(k). \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Corolário **26.5**, obtemos

$$e^{tJ_\lambda} = e^{\lambda t\mathbf{Id} + t\mathbf{G}(1)} = e^{\lambda t\mathbf{Id}} e^{t\mathbf{G}(1)} = e^{\lambda t}\mathbf{Id} e^{t\mathbf{G}(1)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^n}{n!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$