29 ª Aula 2004.11.22 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

29.1 Fórmula da variação das constantes.

Voltemos a considerar o sistema

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante (não depende de t) e $\mathbf{B}(t)$ é um a função definida para valores de t num intervalo real I com valores em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, na nossa notação, com valores nas matrizes $n \times 1$).

Agora que já estamos familiarizados com as exponenciais de matrizes podemos facilmente mostrar o seguinte teorema.

Teorema 29.1 *(**Fórmula da variação das constantes** para sistema de equações de coeficientes constantes)*

Seja $\mathbf{B} : I \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbf{y_0} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes . Então o problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad \textit{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$$

tem uma única solução definida em I dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\, ds$$

Observação 29.1 *A parcela $\mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y_0}$ corresponde à solução da equação homogénea e a parcela $\int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\, ds$ corresponde à solução do problema para a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Temos então a seguinte situação que é geral para as equações lineares e que demonstraremos a seguir:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Solução geral}\\ \textit{da equação linear}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{Solução geral da}\\ \textit{equação homogénea associada}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\textit{Solução particular}\\ \textit{da equação linear}\end{array}}$$

Demonstração. *Atendendo às propriedades conhecidas da exponencial de matrizes, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\frac{d}{dt}\mathbf{y} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}\right) = \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) = \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}^{-(\mathbf{s}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\, ds \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t_0) + \mathbf{e}^{(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}} \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}^{-(\mathbf{s}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\, ds
\end{aligned}$$

■

Exemplo 29.1 *Considere-se o seguinte sistema de equações*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial na forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0 \quad e \quad \mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a fórmula da variação das constantes a solução é dada por (o cálculo de $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ *foi feito anteriormente no Exemplo **28.1**)*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{e^{4(t-s)}+e^{2(t-s)}}{2} & \frac{e^{4(t-s)}-e^{2(t-s)}}{2} \\ \frac{e^{4(t-s)}-e^{2(t-s)}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2(t-s)}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{4t-3s} + e^{2t-s} \\ e^{4t-3s} - e^{2t-s} \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int_0^t \left(e^{4t-3s} + e^{2t-s}\right) ds \\ \int_0^t \left(e^{4t-3s} - e^{2t-s}\right) ds \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^t + e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \\ \frac{2}{3}e^t - e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vamos de seguida mostrar a relação geral

Solução geral da equação linear	=	**Solução geral da equação homogénea associada**	+	**Solução particular da equação linear**

Teorema 29.2 *Se* $\mathbf{y}(t)$ *e* $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ *são soluções de* $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}$*, então*

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{u}(t)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ *é solução da equação homogénea* $\frac{d}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Portanto se conhecermos uma solução particular $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ podemos conhecer qualquer solução $\mathbf{y}(t)$ se conhecermos todas as soluções $\mathbf{u}(t)$ da equação homogénea.

Demonstração. Seja $\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)$, então

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\mathbf{y}(t) - \left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B} - \mathbf{B} = 0$$

■

Observação 29.2 *Note-se que o resultado e a demonstração apenas precisam da hipótese „*$\frac{d}{dt} - \mathbf{A}$ *é um operador linear" e é válida portanto para qualquer equação do tipo* $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}$*, onde* $\mathbf{L}$ *é um operador linear num certo espaço (de funções)* E *e* $\mathbf{B}$ *um elemento desse espaço. Resumindo, se* $\mathbf{L}: E \to E$ *é linear,* $\mathbf{B} \in E$ *e* $\tilde{\mathbf{y}} \in E$ *é uma solução de* $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}$*, então a solução geral de* $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}$ *é dada por* $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}$ *onde* $\mathbf{u}$ *é a solução geral da equação homogénea* $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0}$.