30 ª Aula 2004.11.24 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

30.1 Equações diferenciais de ordem n

Comecemos com considerações gerais sobre equações de ordem n; nomeadamente sobre a sua relação com sistemas de equações de primeira ordem e a consequente existência e unicidade de soluções.

Uma equação diferencial de ordem n da forma

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

pode ser reduzida a um sistema de equações de primeira ordem: definindo

$$\begin{array}{ll} x_1(t) & = y(t) \\ x_2(t) & = y'(t) \\ x_3(t) & = y''(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n(t) & = y^{(n-1)}(t) \end{array}$$

obtemos

$$\begin{array}{ll} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = x_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1}' & = x_n \\ x_n' & = f(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \end{array}$$

Pelo que se pode aplicar o Teorema de Picard-Lindelöf (Teorema **24.1**). Ou seja, se a função $f(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ é contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e localmente lipschitziana em relação a $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ em D; então dado $(t_0, c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ em D o seguinte problema de valor inicial

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \quad \text{com} \quad \left\{\begin{array}{ll} y(t_0) & = c_1 \\ y'(t_0) & = c_2 \\ y''(t_0) & = c_3 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) & = c_n \end{array}\right.$$

tem uma única solução $y(t)$ de classe C^n definida numa vizinhança de t_0.

30.2 Equação linear de ordem n de coeficientes constantes.

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = h(t)$$

onde a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1 e a_0 são constantes (escalares; números reais). Mas $h(t)$ é uma função (dada) definida num intervalo real I e $y \equiv y(t)$ é a função procurada (incógnita).

Pelo a fórmula da variação das constantes (Teorema **29.1**) podemos resolver esta equação se resolvermos a equação homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{H}$$

30.3 Matriz companheira e polinómio característico

Tal com anteriormente, temos (equivalência de (H) a um sistema de equações de 1ª ordem)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Esta última matriz constante $\mathbf{A}$ designa-se por **matriz companheira** da equação linear (H).

Pode-se resolver então a equação (H) calculando a exponencial desta matriz ($\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$). Não seguiremos directamente este caminho, no entanto é útil calcular o polinómio característico desta matriz: $\det(\mathbf{A} - \lambda)$.

Exercício 30.1 $\det(\mathbf{A} - \lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right)$

Este resultado sugere a seguinte definição:

Definição 30.1 *O **polinómio característico** da equação linear (H) é*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{30.1}$$

Determinando as raizes (os zeros) deste polinómio λ_1, $\lambda_2 ... \lambda_j$, e as suas multiplicidades (ordem dos zeros) respectivas m_1, $m_2 ... m_j$, podemos obter a seguinte factorização do polinómio o característico (30.1):

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

Onde λ_k é uma raiz de $P(\lambda)$ com multiplicidade m_k e portanto

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_j = n$$

onde n é o grau do polinómio (a ordem da equação).

30.4 Operadores diferenciais

A equação (H) pode-se escrever na forma

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\,\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\,\frac{d^2}{dt^2} + a_1\,\frac{d}{dt} + a_0\right) y = 0 \tag{H}$$

Podemos encarar o símbolo

$$\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\,\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\,\frac{d^2}{dt^2} + a_1\,\frac{d}{dt} + a_0$$

como um operador num espaço de funções que a uma função y faz corresponder a função $y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + a_{n-2}\,y^{(n-2)} + \cdots + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y$. Este tipo de operadores designam-se por **operadores diferenciais** lineares de coeficientes constantes e possibilitam a formalização de um cálculo simbólico.

Exemplo 30.1 *Considere-se a equação*

$$y'' + 3y' + 2y = 0. \tag{30.2}$$

Temos

$$y'' + 3y' + 2y = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2\right) y$$

Mas por outro lado

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= y'' + y' + 2\,(y' + y) \\ &= \frac{d}{dt}\,(y' + y) + 2\,(y' + y) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + 2\right)(y' + y) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= y'' + 2y' + y' + 2y \\ &= \frac{d}{dt}\,(y' + 2y) + y' + 2y \\ &= \left(\frac{d}{dt} + 1\right)(y' + 2y) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right) y \end{aligned}$$

donde

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2\right) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right) = \left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right)$$

Note-se que o polinómio característico é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$ *; portanto* $\lambda = -2$ *e* $\lambda = -1$ *são as raizes deste polinómio característico.*

Por outro lado $\left(\frac{d}{dt} + 2\right) y = 0$ *é* $y' + 2y = 0$ *que tem como solução (é uma equação linear de* 1^a *ordem)* $y = ke^{-2t}$*. Do mesmo modo* $\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y = 0 \Leftrightarrow y = ke^{-t}$*. Como a* e^{-2t} *e* e^{-t} *são linearmente independentes e soluções de (30.2) que é uma equação de ordem* 2*, concluímos que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}$$

onde k_1 *e* k_2 *são constantes arbitrárias (a determinar por condições iniciais ou de fronteira). Estas constantes poderão ser determinadas impondo novas condições a* $y(t)$ *como por exemplo as condições iniciais* $y(0) = 0$*;* $y'(0) = 1$*, que levam aos cálculos:*

$$y(0) = k_1 + k_2 = 0$$

$$y'(t) = -2k_1 e^{-2t} - k_2 e^{-t}$$

$$y'(0) = -2k_1 - k_2 = 1$$

portanto $k_1 = -k_2$ *e* $k_2 = -2k_1 - k_2 = 1$*, donde* $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

Facilmente se reconhece que estabelecer igualdades com estes operadores é equivalente a estabelecê-las para os polinómios que se obtêm destes operadores substituindo o operador $\frac{d}{dt}$ pela variável (complexa) λ.

30.5 Solução geral da equação homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{H}$$

Teorema 30.1 *Se* λ_1*,* $\lambda_2 ... \lambda_j$ *são as raizes do polinómio característico e* m_1*,* $m_2 ... m_j$ *as suas respectivas multiplicidades, então*

$$y(t) = t^p\, e^{\lambda_k t} \qquad p = 0, ..., m_k - 1 \qquad k = 1, ..., j$$

constituem n *(*$m_1 + m_2 + ... + m_j = n$*) soluções linearmente independentes da equação (H).*

Considerado a factorização do polinómio característico, obtemos que a equação (H) é equivalente a

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{m_j} y = 0 \tag{H}$$

Notando que, para $p \in \{0, ..., m_k - 1\}$, vem

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{m_j} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} y = 0,$$

o teorema ficará demonstrado quando mostramos que $y(t) = t^p\, e^{\lambda_k t}$ é solução de

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} y = 0.$$

30.5.1 Soluções $t^p\, e^{\lambda_k t}$

Comecemos por notar que ($p \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right) t^p\, e^{\lambda_k t} &= pt^{p-1}\, e^{\lambda_k t} + t^p\, \lambda_k e^{\lambda_k t} - \lambda_k t^p\, e^{\lambda_k t} \\
&= pt^{p-1}\, e^{\lambda_k t}
\end{aligned}$$

Então ($p \in \{0, ..., m_k - 1\}$)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} t^p\, e^{\lambda_k t} &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k - 1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right) t^p\, e^{\lambda_k t} \\
&= p\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k - 1} t^{p-1}\, e^{\lambda_k t} \\
&= p\,(p-1)\,...1 \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k - p} e^{\lambda_k t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercício 30.2 *Mostrar que* $t^p\, e^{\lambda_k t}$, $p = 0, ..., m_k - 1$, $k = 1, ..., j$, *são funções (de t) linearmente independentes (Note-se* $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ *se* $k \neq k'$*).*

30.5.2 Raizes complexas conjugadas

Se λ é uma raiz complexa com multiplicidade m de um polinómio característico com coeficientes (a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1 e a_0) reais, então o número $\bar{\lambda}$ (complexo conjugado de λ) também é raiz, com a mesma multiplicidade m, do mesmo polinómio. Pelo que neste caso temos as soluções (da equação linear homogénea)

$$t^p\, e^{\lambda t} \qquad \text{e} \qquad t^p\, e^{\bar{\lambda} t}$$

com $p \in \{0, ..., m - 1\}$.Então as seguintes combinações lineares destas ainda são soluções:

$$\frac{1}{2} t^p\, e^{\lambda t} + \frac{1}{2} t^p\, e^{\bar{\lambda} t} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2i} t^p\, e^{\lambda t} - \frac{1}{2i} t^p\, e^{\bar{\lambda} t}.$$

Portanto, obtemos as seguintes soluções reais linearmente independentes

$$t^p e^{\alpha t} \cos(\beta t) \qquad \text{e} \qquad t^p e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)\,,$$

onde $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$ e $\beta = \operatorname{Im}\lambda$.

30.5.3 Exemplos

Exemplo 30.2 $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 0$

Polinómio característico: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16$.

$\lambda = 2$ *é uma raiz* ($8 - 24 + 32 - 16 = 0$)

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|rrr|r} & 1 & -6 & 16 & -16 \\ 2 & & 2 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & 0 \end{array}$$

Polinómio característico $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16 = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 8\right) = (\lambda - 2)\left((\lambda - 2)^2 + 4\right)$

Raizes do polinómio característico: $\lambda = 2$; $\lambda = 2 + i2$; $\lambda = 2 - i2$.

Soluções linearmente independentes: e^{2t}; $e^{2t}\cos(2t)$; $e^{2t}\operatorname{sen}(2t)$.

Solução geral:

$$y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{2t}\cos(2t) + k_3 e^{2t}\operatorname{sen}(2t),$$

onde k_1 k_2 *e* k_3 *são constantes arbitrárias*

Exemplo 30.3 $y''' - 8y'' + 25y' - 26y = 0$

Polinómio característico: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26$.

$\lambda = 2$ *é uma raiz* ($8 - 32 + 50 - 26 = 0$)

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|rrr|r} & 1 & -8 & 25 & -26 \\ 2 & & 2 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & 0 \end{array}$$

Polinómio característico $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16 = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 13\right) = (\lambda - 2)\left((\lambda - 3)^2 + 4\right)$

Raizes do polinómio característico: $\lambda = 2$; $\lambda = 3 + i2$; $\lambda = 3 - i2$.

Soluções linearmente independentes: e^{2t}; $e^{3t}\cos(2t)$; $e^{3t}\operatorname{sen}(2t)$.

Solução geral:

$$y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t}\cos(2t) + k_3 e^{3t}\operatorname{sen}(2t),$$

onde k_1 k_2 *e* k_3 *são constantes arbitrárias*

Exemplo 30.4 $\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$

Polinómio característico: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$

Raizes do polinómio característico: $\lambda = i$; $\lambda = -i$ *ambas com multiplicidade* 2.

Soluções linearmente independentes: $\cos t$; $\operatorname{sen} t$; $t\cos t$ *e* $t\operatorname{sen} t$

Solução geral:

$$y(t) = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3\, t\cos t + k_4\, t\operatorname{sen} t,$$

onde k_1, k_2, k_3 *e* k_4 *são constantes arbitrárias.*