31 ª Aula 2004.11.26 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

31.1 Método dos coeficientes indeterminados

31.1.1 Fundamentação

Vamos agora abordar a EDO de coeficientes constantes, mas não homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = h\,(t) \tag{31.1}$$

que vamos escrever na forma:

$$Ly = h$$

onde

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\,\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\,\frac{d^2}{dt^2} + a_1\,\frac{d}{dt} + a_0$$

Embora já tenhamos o método da variação das constantes para resolver este problema, vamos elaborar um método que envolve menos cálculos. Este método dos coeficientes indeterminados tem contudo um campo de aplicação muito restrito como iremos ver.

Comecemos por notar que a solução geral y da equação não homogénea:

$$Ly = h$$

pode ser obtida se conhecermos a solução geral u da equação homogénea:

$$Lu = 0$$

e uma solução particular z não homogénea (i. e. se conhecermos uma única solução z):

$$Lz = h$$

De facto

$$Ly - Lz = h - h$$

$$L\,(y - z) = 0$$

pelo que

$$y = u + z$$

(também podemos reconhecer esta decomposição na fórmula da variação das constantes)

Hipótese: Suponha-se agora que a função h é solução de uma EDO linear homogénea de coeficientes constantes.

Existe portanto um operador diferencial

$$\tilde{L} = \frac{d^m}{dt^m} + \tilde{a}_{m-1}\,\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \tilde{a}_{m-2}\,\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} + \cdots + \tilde{a}_2\,\frac{d^2}{dt^2} + \tilde{a}_1\,\frac{d}{dt} + \tilde{a}_0$$

tal que

$$\tilde{L}h = 0$$

Então se

$$Lz = h$$

vem

$$\tilde{L}Lz = \tilde{L}h$$

e portanto

$$\left(\tilde{L}L\right) z = 0 \tag{31.2}$$

isto é podemos procurar uma solução particular da equação não homogénea (31.1) na solução geral da equação homogénea (31.2).

31.1.2 Exemplos

1º Exemplo Considere-se a seguinte equação

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^t.$$

Neste caso

$$L = \frac{d^4}{dt^4} + 2\frac{d^2}{dt^2} + 1$$

e $h = e^t$. Facilmente reconhecemos que a função e^t é solução de uma equação homogéneo para a qual o polinómio característico tenha a raiz $\lambda = 1$ ($e^t = e^{\lambda t}$). Portanto podemos tomar o polinómio (binómio) $\lambda - 1$ e o operador

$$\tilde{L} = \frac{d}{dt} - 1$$

de facto

$$\tilde{L}e^t = \frac{de^t}{dt} - e^t = e^t - e^t = 0.$$

Então as soluções de $Ly = h$ são soluções de $L\tilde{L}y = 0$. Esta última equação homogénea tem polinómio característico

$$\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 1) = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 (\lambda - 1)$$

pelo que

$$y = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 t \cos t + k_4 t \operatorname{sen} t + \alpha e^t.$$

Então

$$\begin{aligned}
Ly &= L\left(k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 t \cos t + k_4 t \operatorname{sen} t\right) + \alpha L e^t \\
&= \alpha L e^t \\
&= \alpha \left(\frac{d^4}{dt^4}e^t + 2\frac{d^2}{dt^2}e^t + e^t\right) \\
&= \alpha 4 e^t
\end{aligned}$$

Para que $Ly = h = e^t$ vem

$$\alpha 4 = 1$$

Pelo que a solução geral é

$$y = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3\, t \cos t + k_4\, t \operatorname{sen} t + \frac{e^t}{4},$$

onde k_1, k_2, k_3 e k_4 são constantes arbitrárias.

2º Exemplo Considere-se a seguinte equação[1]

$$y'' - 3y' + 2y = te^t$$

Facilmente reconhecemos que a função te^t é solução de uma equação homogénea para a qual o polinómio característico tenha a raiz $\lambda = 1$ com multiplicidade m (pelo menos) igual a dois ($te^t = t^{m-1}e^{\lambda t}$)[2]. Então as soluções da equação são soluções de uma equação homogénea[3] que tem polinómio característico

$$\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)(\lambda - 1)^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$$

pelo que

$$y = k_1\, e^{2t} + k_2\, e^t + \alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t.$$

Então

$$\begin{aligned}
y'' - 3y' + 2y &= \left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right)'' - 3\left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right)' + 2\left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right) \\
&= \left(\alpha\,(1+t)\,e^t + \beta\,\left(2t + t^2\right) e^t\right)' - 3\left(\alpha\,(1+t)\,e^t + \beta\,\left(2t+t^2\right) e^t\right) \\
&\quad +2\left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right) \\
&= \left(\alpha\,(2+t)\,e^t + \beta\,\left(2 + 4t + t^2\right) e^t\right) - 3\alpha e^t + (-3\alpha - 6\beta + 2\alpha)\, te^t \\
&\quad + (-3\beta + 2\beta)\, t^2 e^t \\
&= (2\alpha + 2\beta - 3\alpha)\, e^t + (\alpha + 4\beta - \alpha - 6\beta)\, te^t + (\beta - \beta)\, t^2 e^t \\
&= (2\beta - \alpha)\, e^t + -2\beta te^t
\end{aligned}$$

[1] Neste caso

$$L = \frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 2 \quad \text{e} \quad h = te^t.$$

[2] Portanto podemos tomar o polinómio $(\lambda - 1)^2$ correspondente ao operador

$$\tilde{L} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)^2$$

de facto

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\left(te^t\right) &= \left(\frac{d}{dt} - 1\right)^2 \left(te^t\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\left(te^t\right)' - \left(te^t\right)\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt} - 1\right) e^t \\
&= 0
\end{aligned}$$

[3] I. e. as soluções de $Ly = h$ são soluções de $L\tilde{L}y = 0$.

Temos então que ter

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases}$$

donde $\beta = \frac{-1}{2}$ e $\alpha = -1$. Pelo que a solução geral é

$$y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^t - te^t - \frac{t^2}{2} e^t,$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

Introduzindo outras condições poder-se-á eventualmente calcular os coeficientes k_1 e k_2 desta solução. Por exemplo se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos, de

$$y'(t) = 2k_1 e^{2t} + k_2 e^t - (1+t) e^t - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^t,$$

as equações

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

donde $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$ (ou $y(t) = e^{2t} - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) e^t$).

31.1.3 Limitações

Ao contrário do método da variação das constantes, o método dos coeficientes indeterminados só se aplica a EDO's de coeficientes constantes. Mas outra restrição importante é a hipótese que foi feita sobre h:

A função h tem de ser uma combinação linear de funções do tipo $t^p e^{\lambda t}$

Por exemplo a equação $y''' - y' = \operatorname{arctg} t$ não pode ser resolvida pelo método dos coeficientes indeterminados mas pode ser resolvida pela fórmula da variação das constantes.

31.2 Redução a um sistema de n equações de 1ª ordem

Recorde-se que a EDO linear de ordem n (escalar) tem a forma

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h(t)$$

e é equivalente a um sistema de equações de primeira ordem: definindo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \\ x_3(t) &= y''(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{cases} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = x_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1}' & = x_n \\ x_n' & = -a_0\, x_1 - a_1\, x_2 - a_2\, x_3 \cdots - a_{n-2}\, x_{n-1} - a_{n-1}\, x_n + h(t) \end{cases}$$

Pelo que, a redução acima descrita fica:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$$

onde $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$, a matriz $\mathbf{A}$, designada por matriz companheira, é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

31.3 Matriz Wronskiana. Independência linear de funções

Pelo Teorema **30.1** é fácil determinar a solução geral da equação homogénea associada. Por outro lado sabemos que esta solução é dada pela exponencial da matriz companheira. Pelo que vamos usar a solução geral da equação homogénea para calcular a exponencial da matriz companheira com o objectivo da utilizar na fórmula da variação das constantes (Teorema **29.1**).

Sejam $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

e vamos construir a **matriz Wronskiana** destas funções u_1, u_2, ...,u_n:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & u_3' & \cdots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & \cdots & u_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & u_3^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Cada uma das colunas de $\mathbf{W}(t)$ são soluções do sistema $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ para a matriz companheira $\mathbf{A}$. Temos mesmo a seguinte igualdade matricial

$$\mathbf{W}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{W}(t).$$

Facilmente reconhecemos que as colunas desta matriz Wronskiana são linearmente independentes sse u_1, u_2, ...,u_n (funções de classe C^{n-1}) são linearmente independentes [4]. Por outro lado, para cada t_0, a coluna $\mathbf{y}_k(t) = \left(u_k, u_k', u_k'', \cdots, u_k^{(n-1)}\right)$ é solução do problema de valor inicial $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_k(t_0)$. Pelo que, uma combinação linear qualquer destas funções vectoriais, digamos $\alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t)$, é solução do problema de valor inicial $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \alpha_1\mathbf{y}_1(t_0) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t_0) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t_0)$. Dado que as colunas $\mathbf{y}_k(t)$ são linearmente independentes (como funções vectoriais) concluímos, pela unicidade da solução, que para cada instante t_0 fixo, os vectores $\mathbf{y}_k(t_0)$ são linearmente independentes[5]. Portanto o determinante da matriz formada por estas colunas não se anula:

$$\forall t \qquad \det \mathbf{W}(t) \neq 0.$$

Podemos agora verificar que $\quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$

é solução do seguinte problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

De facto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{W}(t)\right)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 \\ &= \mathbf{A}\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

e $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{W}(t_0)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0$.

Pela unicidade da solução concluímos (no caso de a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1, a_0 serem coeficientes constantes) que $\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}$.

Observação 31.1 *No caso de a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1, a_0 serem funções de t (coeficientes* ***não*** *constantes) a função vectorial $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$ é ainda a solução do problema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Contudo, para calcular a matriz Wronskiana $\mathbf{W}(t)$ necessitamos de conhecer as funções $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea; e no caso de coeficientes* ***não*** *constantes não existe nenhum método geral para obter estas soluções $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$.*

[4] Porque para funções (n-1)-vezes diferenciáveis temos que

$$\forall t \qquad \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \cdots + \alpha_n u_n(t) = 0$$

é equivalente a

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots n-1\} \qquad \forall t \qquad \alpha_1 u_1^{(k)}(t) + \alpha_2 u_2^{(k)}(t) + \cdots + \alpha_n u_n^{(k)}(t) = 0.$$

[5] De facto se fosse $\alpha_1\mathbf{y}_1(t_0) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t_0) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t_0) = \mathbf{0}$, então $\alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t)$ seria solução de $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Como a solução deste problema é única, vinha

$$\forall t \qquad \alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{0}.$$

Sendo as funções $\mathbf{y}_k(t)$ linearmente independentes, concluímos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.