32 ª Aula 2004.11.29 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

32.1 Fórmula da variação das constantes

Temos então pela fórmula dos da variação das constantes (para sistemas de equações - Teorema **29.1**) que a solução de

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = h\,(t)$$

é dada por[1]

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} &= \mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h\,(s) \end{bmatrix} ds \\
&= \mathbf{W}\,(t) \left(\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}\,(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h\,(s) \end{bmatrix} ds \right) = \mathbf{W}\,(t) \begin{bmatrix} c_1\,(t) \\ c_2\,(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}\,(t) \\ c_n\,(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

---

[1] Podemos também fazer uma verificação directa, que

$$\mathbf{y}\,(t) = \mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \mathbf{W}\,(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}\,(s)\,\mathbf{h}\,(s)\,ds$$

é solução de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{h}\,(t)$ com $\mathbf{y}\,(t_0) = \mathbf{y_0}$. De facto usando apenas que $\mathbf{W}'\,(t) = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{W}\,(t)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'\,(t) &= \mathbf{W}'\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \mathbf{W}'\,(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}\,(s)\,\mathbf{h}\,(t)\,ds + \mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t)\,\mathbf{h}\,(t) \\
&= \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{W}\,(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}\,(s)\,\mathbf{h}\,(t)\,ds + \mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t)\,\mathbf{h}\,(t) \\
&= \mathbf{A}\,(t) \left(\mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \mathbf{W}\,(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}\,(s)\,\mathbf{h}\,(t)\,ds \right) + \mathbf{h}\,(t) \\
&= \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{y}\,(t) + \mathbf{h}\,(t),
\end{aligned}$$

e também

$$\mathbf{y}\,(t_0) = \mathbf{W}\,(t_0)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} + \mathbf{W}\,(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \mathbf{W}^{-1}\,(s)\,\mathbf{h}\,(s)\,ds = \mathbf{W}\,(t_0)\,\mathbf{W}^{-1}\,(t_0)\,\mathbf{y_0} = \mathbf{y_0}.$$

Note-se ainda que

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds$$

é um vector constante $\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0}$ mais um integral indefinido de uma certa função vectorial $\left(\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)\right)$, ou seja é uma primitiva dessa função vectorial $\left(\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)\right)$. Pelo que

$$y(t) = c_1(t)\,u_1(t) + c_2(t)\,u_2(t) + \cdots + c_n(t)\,u_n(t)$$

onde

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix} dt$$

com $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea associada e $\mathbf{W}(t)$ a sua matriz Wronskiana

Observação 32.1 *Definindo* $\mathbf{f}(t) = \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *temos* $\mathbf{W}(t)\,\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Pelo que* $\mathbf{f}(t)$ *pode ser calculado resolvendo este sistema (sem necessidade de inverter a matriz* $\mathbf{W}(t)$*). Pelo que a fórmula da variação das constantes fica*

$$y(t) = c_1(t)\,u_1(t) + c_2(t)\,u_2(t) + \cdots + c_n(t)\,u_n(t)$$

com

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{f}(t)\,h(t)\,dt, \qquad \text{onde } \mathbf{f}(t) \text{ é obtido resolvendo } \mathbf{W}(t)\,\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 32.1 *Considere-se a equação*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t}$$

Polinómio característico da equação homogénea é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ *. A solução geral da equação homogénea é então* $C_1\,e^t + C_2\,te^t$*. Podemos agora construir a matriz Wronskiana:*

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)\,e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & (t+1) \end{bmatrix}$$

Temos $\det \mathbf{W} = e^{2t}$ *e* $\mathbf{W}^{-1} = e^{-t}\begin{bmatrix} \blacksquare & -t \\ \blacksquare & 1 \end{bmatrix}$. *Então a solução geral é, pela fórmula da variação das constantes,*

$$y(t) = c_1(t)\ e^t + c_2(t)\ te^t$$

onde

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} &= \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+t} \end{bmatrix} dt = \int e^{-t} \begin{bmatrix} \blacksquare & -t \\ \blacksquare & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+t} \end{bmatrix} dt \\
&= \int \begin{bmatrix} -\frac{t}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -\int \frac{t}{1+t}\, dt \\ \int \frac{1}{1+t}\, dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(1+t) - t + k_1 \\ \log(1+t) + k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto

$$y(t) = (\log(1+t) - t + t\log(1+t))\ e^t + k_1\, e^t + k_2\, te^t.$$

32.2 Equação Linear de coeficientes não constantes

De acordo com a Observação **31.1**, facilmente constatamos que a fórmula da variação das constantes ainda é válida no caso de os coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_0$ serem funções de t:

Considere-se a equação linear de coeficientes **não** constantes:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\ y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\ y^{(n-2)} + \cdots + a_2(t)\ y'' + a_1(t)\ y' + a_0(t)\ y = h(t),$$

onde $a_{n-1}(t)$, $a_{n-2}(t)$... $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$ e $h(t)$ são funções (dadas) definidas num intervalo real I e $y \equiv y(t)$ é a função procurada (incógnita).

Dadas as soluções[2] $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_n(t)$ linearmente independentes da equação homogénea associada :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\ y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\ y^{(n-2)} + \cdots + a_2(t)\ y'' + a_1(t)\ y' + a_0(t)\ y = 0,$$

podemos construir a sua matriz Wronskiana $\mathbf{W}(t)$

Pelo que, de igual modo ao exposto para o caso de coeficientes constantes, podemos concluir que a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1(t)\, u_1(t) + c_2(t)\, u_2(t) + \cdots + c_n(t)\, u_n(t)$$

onde

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix} dt$$

com $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea associada e $\mathbf{W}(t)$ a sua matriz Wronskiana.

[2] Não existe nenhum método geral de obter estas funções no presente caso de coeficientes **não** constantes.

Exemplo 32.2 *Considere-se a seguinte EDO linear de 2ª ordem*

$$y'' + \frac{2t}{1+t^2}y' = \frac{1}{1+t^2}. \tag{32.1}$$

A equação homogénea associada é $y'' + \frac{2t}{1+t^2}y' = 0$*. Podemos verificar que*

$$u_1(t) = 1 \qquad e \qquad u_2(t) = \operatorname{arctg} t$$

são soluções desta equação homogénea[3]*. O matriz Wronskiana destas funções é*

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{arctg} t \\ 0 & \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

Temos $\det \mathbf{W} = \dfrac{1}{1+t^2}$ *($\neq 0$, o que implica que u_1 e u_2 são linearmente independentes). E, pelo método dos cofactores,*

$$\mathbf{W}^{-1} = \left(1+t^2\right)\begin{bmatrix} \blacksquare & -\operatorname{arctg} t \\ \blacksquare & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & -(1+t^2)\operatorname{arctg} t \\ \blacksquare & 1+t^2 \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula da variação das constantes a solução de (32.1) é dada por

$$y(t) = c_1(t) + c_2(t)\operatorname{arctg} t$$

onde

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} &= \int \mathbf{W}^{-1}(t)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt \\
&= \int \begin{bmatrix} \blacksquare & -(1+t^2)\operatorname{arctg} t \\ \blacksquare & 1+t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt \\
&= \int \begin{bmatrix} -\operatorname{arctg} t \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} -\int \operatorname{arctg} t \, dt \\ \int dt \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -t\operatorname{arctg} t + \log\sqrt{1+t^2} + k_1 \\ t + k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto a solução geral de (32.1) é

$$\begin{aligned}
y(t) &= -t\operatorname{arctg} t + \log\sqrt{1+t^2} + k_1 + (t+k_2)\operatorname{arctg} t \\
&= k_1 + k_2\operatorname{arctg} t + \log\sqrt{1+t^2}
\end{aligned}$$

Observação 32.2 *Neste último exemplo poderíamos ter feito a redução $u = y'$, obtendo-se a equação de primeira ordem* $u' + \dfrac{2t}{1+t^2}u = \dfrac{1}{1+t^2}$.

[3] A solução geral desta equação homogénea é, portanto, $y(t) = k_1 + k_2 \operatorname{arctg} t$, onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

32.3 Redução de ordem

32.3.1 Redução de ordem trivial

Considere-se uma equação de ordem n com a forma

$$y^{(n)} = f\left(t, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right),$$

aonde não aparece explicitamente a função incógnita y, mas apenas as suas derivadas. Se considerarmos como incógnita a derivada y' em vez da função y reduzimos a ordem da equação. Isto é, fazendo a substituição

$$u = y',$$

obtemos a equação de ordem $n-1$

$$u^{(n-1)} = f\left(t, u, u', ..., u^{(n-2)}\right).$$

Uma vez determinada uma solução u desta última equação, pode-se calcular uma solução y da equação original por simples primitivação da relação $y' = u$.

Exemplo 32.3 *Considere-se o problema de valor inicial:*

$$y'' = \frac{2t}{3\left(y'\right)^2}; \quad y(1) = 2; \quad y'(1) = 1.$$

Fazendo $u = y'$, vem

$$u' = \frac{2t}{3u^2}; \quad u(1) = 1,$$

uma equação separável; donde se obtém sucessivamente

$$3u^2u' = 2t \quad ,$$

$$u^3 = t^2 + c \quad ,$$

$$u^3 = t^2 \quad ,$$

$$u = \sqrt[3]{t^2}.$$

Portanto

$$y' = \sqrt[3]{t^2}.$$

Primitivando e usando a condição inicial, vem

$$y(t) = \frac{3\sqrt[3]{t^5} + 7}{5}$$

32.3.2 Equações sem dependência explícita no tempo

O método de redução de ordem que vamos agora descrever poderá aplicar-se (após alguma generalização) a equações do tipo

$$y^{(n)} = f\left(y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

aonde a variável t não aparece explicitamente. Contudo para evitar uma notação pesada e fórmulas dificilmente generalizáveis a ordens n arbitrárias, apenas consideraremos o caso $n = 2$.

Considere-se então a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right).$$

Seja y uma solução e suponha-se que existe uma função $\mathbf{v}$ tal que

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{v}(y)$$

(ou seja estamos a supor que y é solução de uma EDO de primeira ordem). Derivando esta relação obtemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dy}(y)\frac{dy}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dy}(y)\,\mathbf{v}(y)$$

então

$$\frac{d\mathbf{v}}{dy}(y)\,\mathbf{v}(y) = f(y, \mathbf{v}(y)) \tag{32.2}$$

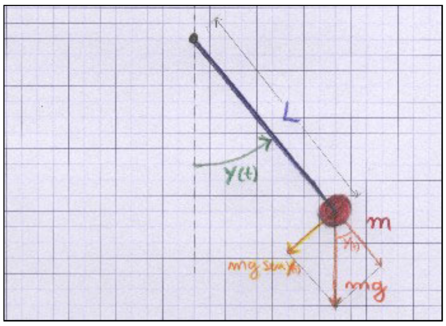
que é uma equação de ordem 1 $(= 2 - 1)$ em que a incógnita é a função $\mathbf{v}$.

Seja então $\mathbf{v}(y)$ uma solução da equação (32.2) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{v}(y_0) = v_0$ e para esta função $\mathbf{v}$ considere-se a solução $y(t)$ do problema $\frac{dy}{dt} = \mathbf{v}(y)$ com $y(t_0) = y_0$. Então, pelo exposto acima, esta função $y(t)$ é também solução de

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt}(t_0) = v_0.$$

32.3.3 Exemplo- o pêndulo

Consideremos o pêndulo representado na seguinte figura:



onde m é a massa do corpo pontual suspenso por um filamento rígido de comprimento L e y é o ângulo (em radianos) que este filamento faz com a vertical. Sobre a massa m actua uma força (gravítica) constante (na aproximação usual) direccionada de cima para baixo e com intensidade mg (onde g é a aceleração da gravidade).

Pela lei de Newton e pela análise das forças envolvidas, temos:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Ly) = -mg\,\mathrm{sen}\,y$$

ou seja

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,y$$

Por conveniência de simplicidade de exposição vamos tomar as seguintes condições iniciais:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \dot{y}(0) = 2\sqrt{\frac{g}{L}}$$

De acordo com o exposto anteriormente vamos considerar:

$$\dot{y} = \mathbf{v}(y)$$

i. e. $\mathbf{v}(y)$ é a velocidade (angular) como função da posição (angular) y. Temos $\dot{y} = \mathbf{v}$, $\ddot{y} = \mathbf{v}'\mathbf{v}$ e

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,y$$

donde

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{g}{L}\cos y + c$$

Determinando a constante[4] c através das condições iniciais temos

$$\dot{y}(0) = \mathbf{v}(y(0))$$

ou seja

$$2\sqrt{\frac{g}{L}} = \mathbf{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

donde

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{g}{L}\cos\frac{\pi}{2} \\ &= 2\frac{g}{L} \end{aligned}$$

Obtemos então[5] (atendendo a que $\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$)

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{2g}{L}(2+\cos y)}$$

---

[4] A constante c não é mais do que a energia em unidades apropriadas. De facto, multiplicando a igualdade $\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{g}{L}\cos y = c$ pelo factor mL^2 e somando a parcela mgL obtemos

$$\frac{1}{2}m(L\mathbf{v})^2 + mgL(1-\cos y) = mL^2c + mgL$$

onde podemos reconhecer (no lado esquerdo) a soma da energia cinética com a energia potencial do sistema. Portanto se E for a energia (total) do pêndulo, determinada pelas condições iniciais, então $c = \frac{E}{mL^2} - \frac{g}{L}$.

[5] Desta expressão vemos que a velocidade $\mathbf{v}$ é sempre positiva. Esta propriedade veio da escolha particular das condições iniciais, correspondendo a uma energia suficientemente grande para que o pêndulo tenha um movimento de rotação em torno do seu eixo.

Temos agora o seguinte problema

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2g}{L}(2+\cos y)} \quad ; \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

Donde [6]

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{2+\cos y}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

e

$$F(y) \equiv \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} \frac{1}{\sqrt{2+\cos z}}\, dz = \sqrt{\frac{2g}{L}}\, t$$

Como $F'(y) = \frac{1}{\sqrt{2+\cos y}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, esta função $F(y)$ é bijectiva[7] e portanto invertível por uma função (diferenciável) F^{-1} (i. e. $(F^{-1} \circ F)(y) = y$). Então a solução do nosso problema pode-se escrever

$$y(t) = F^{-1}\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t\right)$$

32.3.4 Relação com o pêndulo linearizado.

Geralmente aprende-se em cadeiras de Física elementar, outra solução do problema do pêndulo. De facto não se trata de outra solução do mesmo problema, mas da solução de outro problema: a aproximação linear do pêndulo. Trata-se portanto de aproximar o problema

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen} y,$$

pelo problema

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L} y,$$

sendo esta aproximação tanto mais razoável quanto menor for a amplitude das oscilações (i. e. $y \approx 0$). Desta equação linear homogénea facilmente se reconhece a solução geral:

$$y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) - \sqrt{\frac{L}{g}} \dot{y}_0 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right).$$

Temos então de forma paradigmática, um exemplo da importância do estudo das equações lineares, não porque representem em geral um bom modelo nas aplicações vistas de forma global, mas porque constituem um importante utensílio matemático na análise aproximada de modelos em regiões perto do equilíbrio.

---

[6] No caso da escolha de outros valores iniciais o que se segue deve-se aplicar apenas em intervalos de tempo t em que a velocidade $\dot{y}(t)$ tenha sinal constante. Isto é, no caso da função $\mathbf{v}$ se anular para certos valores de y, podemos ainda aplicar o mesmo raciocínio mas de forma mais intrincada subdividindo o tempo em intervalos aonde o pêndulo se movimenta num mesmo sentido.

[7] É estritamente crescente ($F' > 0$) e

$$\lim_{y \to \pm\infty} F(y) = \pm\infty$$

(porque $F(y) > \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ se $y > \frac{\pi}{2}$ e $F(y) < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ se $y < \frac{\pi}{2}$).