

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

35.1 Série de Fourier na forma de exponenciais complexas

Seja f definida em $[0, 2\pi]$, para simplificar notação, integrável neste intervalo, e a sua série de Fourier

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),$$

$$\text{com } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Utilizando as fórmulas de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned} SF_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

com¹

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2} & \text{se } n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{se } n \leq -1 \end{cases}, \quad (35.1)$$

ou seja

$$\begin{aligned} c_n &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)}{2} dx & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \right) & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(-nx) + i \operatorname{sen}(-nx)}{2} dx & \text{se } n \leq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)) dx & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)) dx & \text{se } n \leq -1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

¹Ou seja, para $n \geq 0$,

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{e} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Resumindo na forma de exponenciais complexas a série de Fourier de uma função $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ escreve-se

$$SF_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

35.2 Convergência em média quadrática

A série de Fourier de uma função f integrável em $[0, 2\pi]$, pode-se escrever na forma

$$SF_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n(x),$$

onde as funções $\varphi_n(x)$ são definidas por

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

e os coeficientes por

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} f \overline{\varphi_n} dx,$$

onde $\overline{\varphi_n}$ designa o complexo conjugado da função φ_n (portanto $\overline{\varphi_n} = \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}$). Estas funções φ_n satisfazem a seguinte relação²

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_m \overline{\varphi_n} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} \frac{e^{i(m-n)2\pi} - 1}{2\pi i(m-n)} & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx & \text{se } m = n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \\ &= \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Então se definirmos o produto interno (num espaço adequado)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f \overline{g} dx,$$

temos

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{m,n},$$

²O símbolo $\delta_{m,n}$ é designado por delta de Kronecker e é definido por:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}.$$

ou seja podemos interpretar o conjunto das funções $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como uma base ortonormada de um certo espaço. Por outro lado com esta notação vem

$$\alpha_n = \langle f, \varphi_n \rangle,$$

que pode ser interpretado como a projecção de f na direcção φ_n , e portanto

$$SF_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad (35.2)$$

será a projecção no espaço gerado pela base $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Este espaço será um subespaço dum espaço designado $L^2([0, 2\pi])$ a que está associada a norma

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2} &= \sqrt{\langle f, f \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2 dx}. \end{aligned}$$

Neste espaço constituído de funções de quadrado integrável, devemos então considerar

$$f = g \quad \text{sse} \quad \|f - g\|_{L^2} = 0.$$

Ou seja devemos identificar funções difiram apenas num conjunto de medida nula. Do mesmo modo devemos considerar que uma sequência de funções $f_n \in L^2([0, 2\pi])$ converge para $f \in L^2([0, 2\pi])$ sse

$$\lim_n \|f_n - f\|_{L^2} = 0,$$

ou seja sse

$$\lim_n \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 dx = 0.$$

Esta convergência é designada por **convergência em média quadrática**. Portanto é neste sentido que deve ser considerada a convergência da série (35.2). Pode-se mostrar que o espaço gerado pela base $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de facto todo o espaço $L^2([0, 2\pi])$. Ou seja para qualquer $f \in L^2([0, 2\pi])$ tem-se

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

É este resultado que é enunciado no seguinte Teorema.

Teorema 35.1 Dado $f \in L^2([0, 2\pi])$, define-se

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad e \quad f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Então

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |f_N(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

35.3 Identidade de Parseval

A identidade de Parseval não é mais do que a relação bem conhecida da álgebra linear³:

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2.$$

Traduzindo no presente contexto,

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

No caso de f ser uma função com valores reais é mais natural escrever a série de Fourier na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

e portanto, é útil estabelecer a identidade de Parseval em termos destes coeficientes a_n e b_n , usando as relações (35.1):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f|^2 dx &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\ &= 2\pi \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \right) \\ &= 2\pi \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) + a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right), \end{aligned}$$

obtendo-se **identidade de Parseval**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 dx.$$

³Recorde-se a dedução formal:

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m \rangle \varphi_m \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \langle f, \varphi_m \rangle \varphi_m, \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m \rangle \overline{\langle f, \varphi_n \rangle} \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m \rangle \overline{\langle f, \varphi_n \rangle} \delta_{m,n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle f, \varphi_n \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

35.4 Regularidade e estimativas sobre os coeficientes

Vamos agora justificar rigorosamente a seguinte afirmação imprecisa: uma função é tanto mais regular quanto mais depressa os coeficientes de Fourier convergirem para 0, e vice-versa.

Proposição 35.2 *Se f é periódica e de classe C^k , então os seus coeficientes de Fourier a_n e b_n são tais que $n^k |a_n|$ e $n^k |b_n|$ são sucessões limitadas.*

Demonstração. Para simplificação de notação vamos considerar f de período 2π .

Vamos começar por provar por indução em j , que para todo $n \in \mathbb{N}_1$, se $0 \leq j \leq k$ então

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{\pi n^j} \left(\left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \cos(nx) dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| \right) \quad (35.3)$$

Esta afirmação é obviamente verdadeira para $j = 0$ (por definição dos coeficientes). Por outro, usando integração por partes e atendendo a que todas as derivadas de f têm período 2π , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \cos(nx) dx \right| &= \left| \left[f^{(j)}(x) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| \end{aligned}$$

e do mesmo modo

$$\left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \cos(nx) dx \right|.$$

Então usando a hipótese de indução vem

$$\begin{aligned} |a_n| + |b_n| &= \frac{1}{\pi n^j} \left(\left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \cos(nx) dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^j} \left(\frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| + \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \cos(nx) dx \right| \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^{j+1}} \left(\left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \cos(nx) dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right| \right). \end{aligned}$$

Uma vez demonstrada a relação (35.3) obtemos

$$\begin{aligned} |a_n| + |b_n| &\leq \frac{1}{\pi n^k} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)| (|\cos(nx)| + |\operatorname{sen}(nx)|) dx \\ &\leq \frac{4}{n^k} \max_x |f^{(k)}(x)|, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar ■

Proposição 35.3 *Se para certo $k \in \mathbb{N}$ as sequências a_n e b_n satisfazem a condição:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) \quad \text{é convergente,}$$

então a série de Fourier com coeficientes a_n e b_n define uma função de classe C^k .

Demonstração. Temos, para qualquer natural $j \leq k$,

$$\begin{aligned} |n^j a_n \cos(nx)| + |n^j b_n \sin(nx)| &\leq n^j (|a_n| + |b_n|) \\ &\leq n^k (|a_n| + |b_n|), \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a hipótese sobre os coeficientes a_n e b_n , concluímos pelo critério de Weierstrass que as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \cos(nx) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^j b_n \sin(nx)$$

são uniformemente convergentes em \mathbb{R} para $j \leq k$. Então (para $1 \leq j \leq k$)

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \cos(nt) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \int_0^x \cos(nt) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{j-1} a_n \sin(nx),$$

pelo que

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{j-1} a_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \cos(nx).$$

De forma semelhante (fazendo agora a integração entre $\frac{\pi}{2}$ e x) obtemos

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{j-1} a_n \cos(nx) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \sin(nx).$$

Usando iterativamente estas relações concluímos que a função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

é k vezes diferenciável e a sua derivada de ordem k é dada pela soma

$$s_c \sum_{n=1}^{+\infty} n^k a_n \cos(nx) + s_s \sum_{n=1}^{+\infty} n^k b_n \sin(nx),$$

onde $s_c, s_s \in \{-1, 1\}$. Como vimos acima estas são séries uniformemente convergentes de funções contínuas, pelo que $f^{(k)}(x)$ é uma função contínua. ■

Como corolário fácil das duas últimas proposições temos a seguinte afirmação: Se f é de classe C^k , então os seus coeficientes de Fourier satisfazem, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\lim n^{k-\epsilon} a_n = \lim n^{k-\epsilon} b_n = 0;$$

reciprocamente se a_n e b_n satisfazem, para algum $\epsilon > 0$,

$$\lim n^{k+1+\epsilon} a_n = \lim n^{k+1+\epsilon} b_n = 0,$$

então a série de Fourier que definem é de classe C^k .