36 ª Aula 2004.12.13 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

36.1 Equação do Calor não homogénea

Considere-se o problema do calor numa barra de comprimento L e com constante de difusão térmica k, em que é dada uma distribuição inicial de temperatura $f(x)$ e as extremidades da barra são mantidas às temperaturas T_1 e T_2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(t,0) = T_1 \\ u(t,L) = T_2 \end{cases} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

Já resolvemos este problema no caso $T_1 = T_2 = 0$. Se tentarmos seguir a mesma estratégia de resolução deparamo-nos com uma dificuldade: apesar de ser possível determinar soluções separadas do problema sem a condição inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(t,0) = T_1 \\ u(t,L) = T_2 \end{cases} \end{cases},$$

este último problema não é homogéneo; combinações lineares de soluções não são soluções. Pelo que não é útil determinar muitas soluções deste problema. Em vez disso vamos determinar apenas uma solução u_0, i.e. uma função (simples) que satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u_0(t,0) = T_1 \\ u_0(t,L) = T_2 \end{cases} \end{cases}.$$

Uma vez determinado u_0 vamos procurar a função $w = u - u_0$. Esta função deve ser tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \begin{cases} w(t,0) = 0 \\ w(t,L) = 0 \end{cases} \\ w(0,x) = f(x) - u_0(0,x) \end{cases},$$

uma vez que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned} w(t,0) &= u(t,0) - u_0(t,0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(t,1) &= u(t,1) - u_0(t,1) = T_2 - T_2 = 0, \\ w(0,x) &= u(0,x) - u_0(0,x) = f(x) - u_0(0,x). \end{aligned}$$

Portanto w satisfaz uma equação que já sabemos resolver. Uma vez determinada a função w, obtemos a função pretendida é $u = u_0 + w$.

Do ponto de vista matemático qualquer função u_0 nas condições indicas servirá para resolver o problema, pelo que a escolha deverá obedecer a um critério de simplicidade. Do ponto de vista físico será interessante escolher uma função u_0 nas condições indicas que tenha um significado físico relevante.

No presente caso, determinar (se possível) u_0 independente da variável t será uma boa escolha uma vez que terá a interpretação física óbvia de **solução de equilíbrio** do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u_0(t,0) = T_1 \\ u_0(t,L) = T_2 \end{cases} \end{cases}.$$

A função w terá então a interpretação da diferença de temperatura em relação ao equilíbrio quando distribuição inicial de temperatura é $f(x)$.

Portanto, impondo $\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = 0$ (solução de equilíbrio), obtemos $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$ e primitivando duas vezes vem $u_0(x) = A + Bx$. Finalmente as condições fronteira impõem

$$u_0(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x,$$

que é, portanto, a solução de equilíbrio procurada. Por outro lado a função w foi determinada em (**33.1**) e é

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

onde os coeficientes b_n são determinados por

$$f(x) - u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Atendendo à forma de u_0 e ao nosso conhecimento sobre séries de senos concluímos que a solução procurada é (pelo menos no caso de f ser contínua e seccionalmente monótona)

$$u(t,x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

onde os coeficientes b_n são determinados por

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx.$$

O método utilizado na resolução deste problema é facilmente generalizável para resolver outros problemas não homogéneos como aqueles se indicam nos seguintes exemplos.

Exemplo 36.1 *Considere-se o seguinte problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen}(\pi x) \\ \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,1) = 0 \end{cases} \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x) \end{cases}.$$

(Uma barra, com as extremidades sempre a 0 *graus, é aquecida na parte central.)*

Vamos procurar uma solução u_0 *de equilíbrio (i.e. tal que* $\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = 0$*) do problema sem a condição inicial. Obtemos*

$$u_0''(x) = -\operatorname{sen}(\pi x) \quad \text{com} \quad u_0(0) = u_0(1) = 0,$$

donde

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x).$$

Vamos agora determinar $w = u - u_0$*. Temos*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \begin{cases} w(t,0) = 0 \\ w(t,1) = 0 \end{cases} \\ w(0,x) = \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)\operatorname{sen}(\pi x) \end{cases}.$$

Donde

$$w(t,x) = e^{-\pi^2 t}\left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)\operatorname{sen}(\pi x)$$

e

$$u(t,x) = \left(e^{-\pi^2 t}\left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi^2}\right)\operatorname{sen}(\pi x).$$

Exemplo 36.2 *Considere-se o seguinte problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} t \\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \end{cases} \\ u(0,x) = \cos(\pi x) \end{cases}.$$

(Uma barra isolada é aquecida e arrefecida periodicamente e uniformemente segundo uma lei sinusoidal.)

Vamos procurar uma solução u_0 que não dependa da variável x (i.e. uma solução uniforme) do problema. Obtemos

$$u_0'(t) = \operatorname{sen} t,$$

donde podemos tomar

$$u_0(t) = -\cos t.$$

Vamos agora determinar $w = u - u_0$. Temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,1) = 0 \end{cases} \\ w(0,x) = \cos(\pi x) + 1 \end{cases} .$$

Donde

$$w(t,x) = e^{-\pi^2 t}\cos(\pi x) + 1$$

e

$$u(t,x) = e^{-\pi^2 t}\cos(\pi x) + 1 - \operatorname{sen} t.$$

36.2 Comportamento qualitativo das soluções da Eq. do Calor

Vamos agora analisar as soluções da equações de calor que determinamos. Considere-se por exemplo a solução (**33.1**) do problema (**P1**) da 33ª aula. Comecemos por notar que a solução

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

tende para a solução de equilíbrio (neste caso, uma solução de temperatura constante igual a zero). Ou seja

$$\forall x \in [0,L] \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t,x) = 0.$$

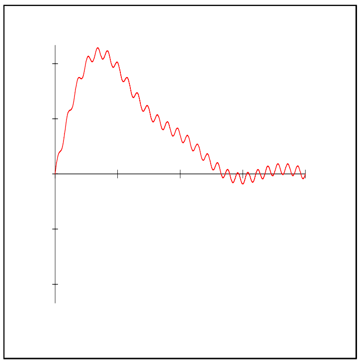
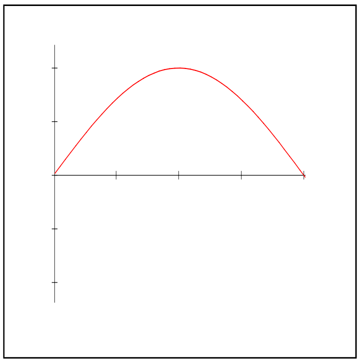
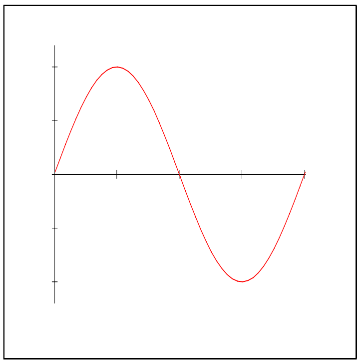
Por outro lado pode-se mostrar que, mesmo no caso em que para $t = 0$ a função $u(0,x)$ não seja muito regular (por exemplo contínua e seccionalmente monótona mas não diferenciável), $u(t,x)$ é de classe C^∞ para qualquer $t > 0$ (por mais pequeno que seja t).

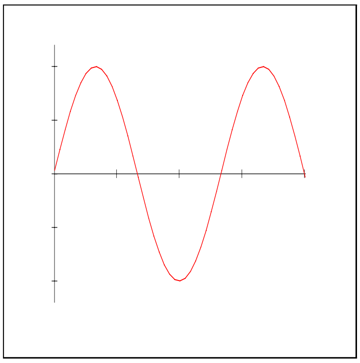
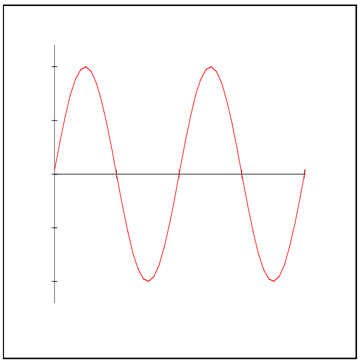
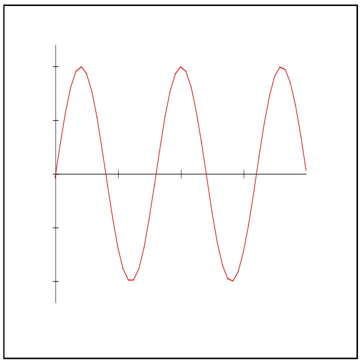
Este mesmo fenómeno de regularização, operado pela evolução difusiva governada pela equação do calor, é aparente na forma da solução $u(t,x)$: atendendo a que $e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t}$ decresce exponencialmente com t e com n, passado pouco tempo (i.e. mesmo para pequenos valores de t) a solução é bem aproximada por uma soma finita de funções de pequena variação, e.g.

$$u(t,x) \approx b_1 e^{-\frac{\pi^2 k}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) + b_2 e^{-4\frac{\pi^2 k}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right).$$

Graficamente temos para $t=0$: $\quad u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\quad$ ou seja:

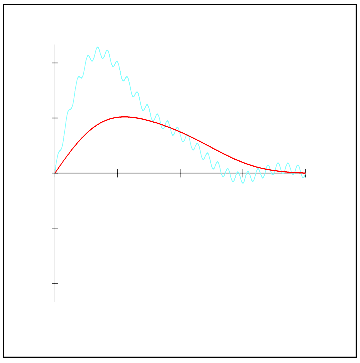
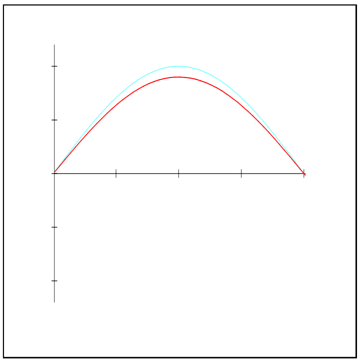
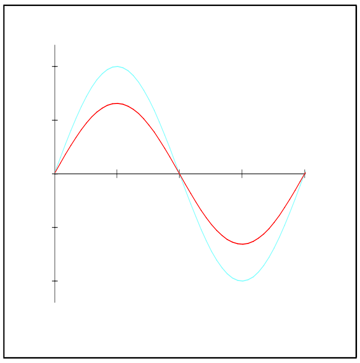
$$u(0,x)=b_1\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{L}x\right)+b_2\operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right)+b_3\operatorname{sen}\left(\tfrac{3\pi}{L}x\right)+b_4\operatorname{sen}\left(\tfrac{4\pi}{L}x\right)+b_5\operatorname{sen}\left(\tfrac{5\pi}{L}x\right)+\cdots$$

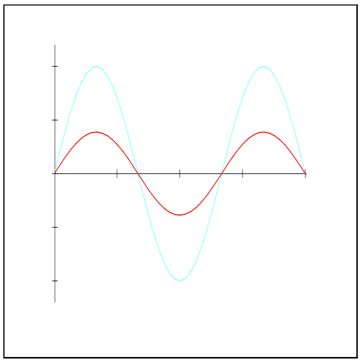
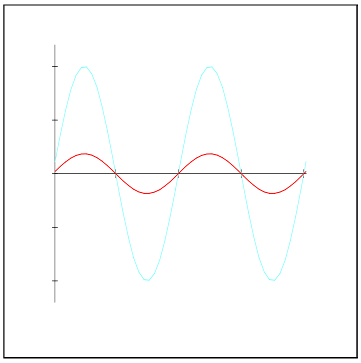
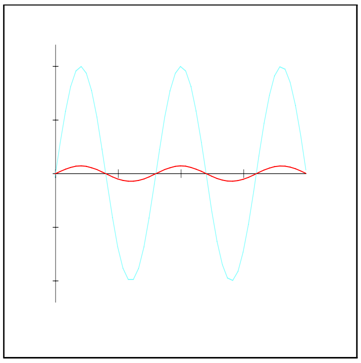
 $= b_1$  $+\ b_2$  $+$

$+\,b_3$  $+\,b_4$  $+\,b_5$  $+\cdots$

E para $t\neq 0$: $\quad u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\frac{\pi^2 k}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\quad$ ou seja:

$$u(t,x)=b_1e^{-\frac{\pi^2k}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{L}x\right)+b_2e^{-4\frac{\pi^2k}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right)+b_3e^{-9\frac{\pi^2k}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\tfrac{3\pi}{L}x\right)+b_4e^{-16\frac{\pi^2k}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\tfrac{4\pi}{L}x\right)+\cdots$$

 $= b_1$  $+\,b_2$  $+$

$+\,b_3$  $+\,b_4$  $+\,b_5$  $+\cdots$

36.3 Equação das ondas-separação de variáveis

Problemas de vibração elástica podem, em certos casos, ser bem modulados pela equação das ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{lap} u$$

Tal como fizemos para a equação do calor vamos considerar também aqui o caso unidimensional, apenas por simplicidade de exposição, pois todos os métodos indicados são facilmente generalizáveis a dimensões superiores.

Vamos então concentrar-nos no seguinte problema, que correspondente ao estudo das vibrações transversais de uma corda perfeitamente elástica de comprimento L:

$$\begin{cases} \textbf{Equação das ondas} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{array}{l}\textbf{Condições fronteira} \\ \text{(de Dirichlet)}\end{array} & \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,L) = 0 \end{cases} \\ \textbf{Condições iniciais} & \begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{com} \quad x \in [0,L]\,. \end{cases} \tag{36.1}$$

A solução $u(t,x)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0,L]$, representa o deslocamento u em relação ao equilíbrio no instante t e em cada ponto x da corda elástica cujo comprimento em repouso é L. A constante positiva c depende da densidade desta corda ideal e da tensão a que está sujeita. As condições fronteira indicam que as extremidades da corda estão fixas. As condições iniciais fixam a posição e a velocidade transversal da corda no instante inicial. (Note-se que se têm duas condições iniciais e que a equação é de segunda ordem em t.)

Aplicando o método da separação de variáveis, vamos determinar funções da forma $u(t,x) = T(t)\,X(x)$ soluções do problema linear homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t,L) = 0 \end{cases}. \tag{36.2}$$

Temos

$$T''X = c^2 T X'' \quad \text{e} \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Portanto $\lambda = \dfrac{T''}{c^2 T} = \dfrac{X''}{X}$ tem de ser constante, donde

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \quad \text{com} \quad X(0) = X(L) = 0 \\ T'' = \lambda c^2 T \end{cases}.$$

O primeiro problema já resolvemos anteriormente e só tem soluções não triviais quando

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{com } n \in \mathbb{N}_1,$$

sendo as soluções dadas, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Temos agora, para cada $n \in \mathbb{N}_1$,

$$T'' = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T.$$

Resolvendo esta equação homogénea de 2ª ordem obtemos

$$T(t) = A\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right),$$

onde A e B são constantes arbitrárias. As soluções $T(t)X(x)$ que acabamos de obter,

$$\left(A\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

podem ser somadas para obter uma solução geral (formal) do problema (36.2). Vamos agora determinar os coeficientes A_n e B_n de modo a que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

seja solução de (36.1).

Usando a primeira condição inicial vem

$$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Reconhecemos a série de senos da função $u_0(x)$ e portanto

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$

Derivando formalmente $u(t,x)$ em ordem a t obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-n\pi c}{L}A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{n\pi c}{L}B_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

pelo que a segunda condição inicial fica

$$v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi c}{L}B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Também aqui reconhecemos uma série de senos, agora da função $v_0(x)$, e portanto

$$\frac{n\pi c}{L}B_n = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx,$$

ou seja

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$