38 ª Aula 2004.12.17 **AMIV** LEAN, LEC **Apontamentos**

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

38.1 Equilíbrio da equação do calor e da equação das ondas

Quer na equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = k \operatorname{lap} u$, quer na equação das ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{lap} u$, as configurações de equilíbrio (i.e. as soluções que não dependem do tempo t) são dadas pela equação de Laplace

$$\operatorname{lap} u = 0.$$

Portanto as soluções da equação de Laplace tanto podem ser interpretadas como os estados de equilíbrio térmico ou como configurações de equilíbrio elástico.

As soluções de classe C^2 da equação de Laplace designam-se por funções harmónicas.

A duas dimensões a equação de Laplace fica

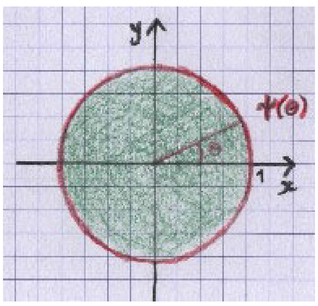
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Desta equação bidimensional já conhecemos (ver aulas de análise complexa) uma descrição precisa das suas soluções: u é solução da equação de Laplace sse é a parte real de uma função analítica. Com base neste conhecimento vamos resolver a equação de Laplace com condições fronteira num domínio circular.

38.2 Equação de Laplace - Domínio circular

Considere-se o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{lll} \textbf{Equação de Laplace} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{para } x^2 + y^2 < 1 \\ \textbf{Condição fronteira (de Dirichlet)} & u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \psi(\theta), & \text{para } \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right. . \tag{38.1}$$



Este problema a ter solução, como veremos que tem (se ψ for suficientemente regular), será dada pela parte real de uma função analítica $g(z)$. Ou seja dada a solução u, poder-se-á determinar a sua harmónica conjugada v e a função analítica

$$g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Esta função g será analítica no círculo $|z| < 1$, pelo que esta função pode ser desenvolvida em série de Maclaurin:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \qquad \text{para } |z| < 1.$$

Então, pelo menos formalmente, vem

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \operatorname{Re} g\left(e^{i\theta}\right) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Designando $a_n = \operatorname{Re} c_n$ e $b_n = -\operatorname{Im} c_n$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - ib_n)\, e^{in\theta} \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - ib_n)(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)) + i\,(a_n \operatorname{sen}(n\theta) - b_n \cos(n\theta))\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Ou seja, em condições gerais, a_n e b_n são os coeficientes de Fourier da função ψ.

Então, podemos concluir que a solução (formal) do problema proposto é

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - ib_n)(x + iy)^n$$

com

$$a_0 = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta$$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \qquad \text{para } n > 1$$

$$b_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta.$$

Esta solução toma um aspecto particularmente simples se a escrevermos em coordenadas polares:

$$x = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} u(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - ib_n)\left(\rho e^{i\theta}\right)^n \qquad (38.2) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que se o prolongamento periódico de ψ for de classe C^2 então a_n e b_n são tais que tornam a série (38.2) uniformemente convergente para $\rho = 1$; neste caso então, a função u solução do problema (38.1) é definida pela série (38.2) e é de classe C^∞ em $\rho < 1$ e contínua em $\rho \leqslant 1$.

Exemplo 38.1 *Considere-se a seguinte concretização do problema (38.1):*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{para } x^2 + y^2 < 1$$

$$u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = -2 + 5\operatorname{sen}\theta + 3\cos(2\theta) \qquad \text{para } \theta \in [0, 2\pi]$$

De acordo com o exposto acima, a solução é dada por

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - ib_n)(x+iy)^n,$$

onde os coeficientes a_n e b_n são definidos por

$$-2 + 5\operatorname{sen}\theta + 3\cos(2\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)).$$

Portanto $a_0 = -2$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5$, sendo os restantes coeficientes nulos. Obtemos então

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re}\left(-2 + (-i5)(x+iy) + 3(x+iy)^2\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(-2 + -i5x + 5y + 3\left(x^2 - y^2 + i2xy\right)\right) \\ &= -2 + 5y + 3\left(x^2 - y^2\right), \end{aligned}$$

ou em coordenadas polares

$$u(\rho,\theta) = -2 + 5\rho\operatorname{sen}\theta + 3\rho^2\cos(2\theta).$$

38.3 Equação de Laplace - Outros domínios planos

Vamos agora ver como a resolução da equação de Laplace com condições de Dirichlet no círculo pode servir para resolver o mesmo problema noutros domínios. Considere-se então o seguinte problema:

$$\begin{cases} \textbf{Equação de Laplace} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{em } D \\ \textbf{Condição fronteira} \text{ (de Dirichlet)} & u = \varphi \qquad \text{em } \partial D. \end{cases} \tag{38.3}$$

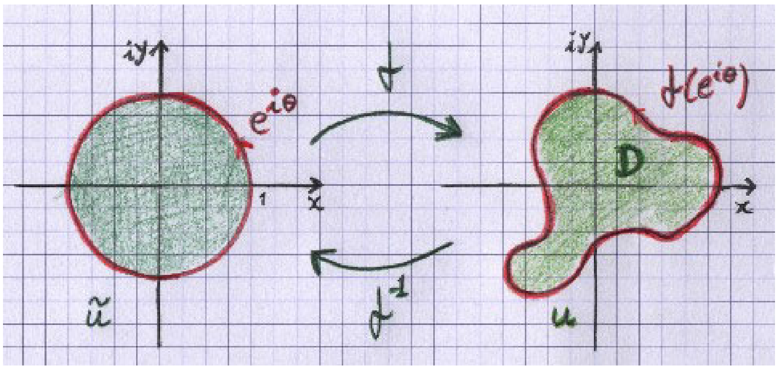
Onde D é um domínio aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$, ∂D é a fronteira do domínio D e φ é uma função dada definida em ∂D (suficientemente regular). Vamos supor ainda que existe uma função $f(z)$ analítica em $|z| \leqslant 1$ com inversa f^{-1} também analítica (no seu domínio) tal que

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \mathbf{P} f(z) \text{ para algum } z \text{ tal que } |z| \leqslant 1\right\},$$

onde $\mathbf{P}$ é aplicação que ao número complexo $x + iy$ faz corresponder o ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$; ou seja f é tal que D é o contradomínio desta função, se identificarmos naturalmente os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{C}$. Suponha-se ainda que[1]

$$\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \mathbf{P} f\left(e^{i\theta}\right) \text{ para algum } \theta \in [0, 2\pi]\right\},$$

ou seja, identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, a fronteira ∂D é parametrizada por $f\left(e^{i\theta}\right)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$.



Então a função

$$u(x,y) = \operatorname{Re} g \circ f^{-1}(x + iy)$$

é solução do problema (38.3), sendo g uma função analítica em $|z| \leqslant 1$ tal que[2]

$$\operatorname{Re} g\left(e^{i\theta}\right) = \psi(\theta) = \varphi\left(\mathbf{P} f\left(e^{i\theta}\right)\right),$$

de acordo com a solução do problema (38.2).

De facto como g e f^{-1} são funções analíticas, concluímos que $u(x,y) = \operatorname{Re} g \circ f^{-1}(x+iy)$ é harmónica. E sobre a fronteira ∂D temos,

$$\begin{aligned} u\left(\mathbf{P} f\left(e^{i\theta}\right)\right) &= \operatorname{Re} g \circ f^{-1}\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re} g\left(e^{i\theta}\right) \\ &= \varphi\left(\mathbf{P} f\left(e^{i\theta}\right)\right). \end{aligned}$$

Ou seja, se $\tilde{u}(x,y)$ é solução do problema (38.2) com $\psi(\theta) = \varphi\left(\mathbf{P} f\left(e^{i\theta}\right)\right)$, então $u(x,y) = \tilde{u}\left(\mathbf{P} f^{-1}(x+iy)\right)$ é solução do problema (38.3).

---

[1] De facto não seria necessário fazer mais hipóteses uma vez que esta expressão para a fronteira ∂D é consequência das hipóteses anteriores, no entanto não iremos fazer aqui essa dedução, pelo que a expressão de ∂D poderá ser tomada como nova hipótese.

[2] A aplicação $\mathbf{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$\mathbf{P} z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z).$$

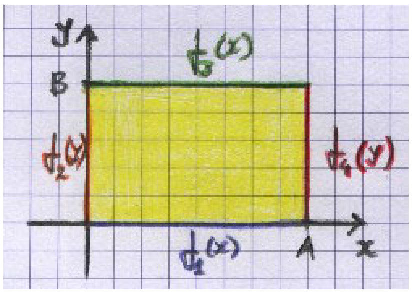
38.4 Equação de Laplace - Domínio rectangular; separação de variáveis

Apesar de termos chegado a soluções da equação de Laplace sem fazer intervir o método da separação de variáveis, este método é ainda importante na resolução destes problemas em domínios rectangulares como veremos de seguida.

Vamos considerar agora o problema

$$\begin{cases} \textbf{Equação de Laplace} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ & \\ \begin{array}{l}\textbf{Condições fronteira} \\ \text{(de Dirichlet)}\end{array} & \begin{cases} u(x,0) = f_1(x) \\ u(0,y) = f_2(y) \\ u(x,B) = f_3(x) \\ u(A,y) = f_4(y) \end{cases} \end{cases} \tag{38.4}$$

no rectângulo $0 \leqslant x \leqslant A$ e $0 \leqslant y \leqslant B$. Uma vez que na descrição deste domínio as variáveis x e y intervêm separadamente, estamos em condições de aplicar o método de variáveis.



Soma de soluções Podemos decompor a solução do problema (38.4) na soma de quarto funções soluções cada uma delas de um problema simplificado. Assim

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x) + u_4(t,x) \tag{38.5}$$

onde as funções u_1, u_2, u_3 e u_4, são soluções, respectivamente, dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \\ u_1(x,0) = f_1(x) \\ u_1(0,y) = 0 \\ u_1(x,B) = 0 \\ u_1(A,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \\ u_2(x,0) = 0 \\ u_2(0,y) = f_2(y) \\ u_2(x,B) = 0 \\ u_2(A,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0 \\ u_3(x,0) = 0 \\ u_3(0,y) = 0 \\ u_3(x,B) = f_3(x) \\ u_3(A,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0 \\ u_4(x,0) = 0 \\ u_4(0,y) = 0 \\ u_4(x,B) = 0 \\ u_4(A,y) = f_4(y) \end{cases}$$

Separação de variáveis Aplicando o método da separação de variáveis, vamos determinar funções da forma $X(x)\,Y(y)$ soluções do problema linear homogéneo:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad u_1(0,y) = u_1(A,y) = 0 = u_1(x,B) \tag{38.6}$$

Temos
$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{com} \quad X(0) = X(A) = 0 \quad \text{e} \quad Y(B) = 0.$$
Portanto $\lambda = \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$ tem de ser constante, donde
$$\begin{cases} X'' = \lambda X \quad \text{com} \quad X(0) = X(A) = 0 \\ \\ Y'' = -\lambda Y \quad \text{com} \quad Y(B) = 0 \end{cases}.$$
O primeiro problema já resolvemos anteriormente e só tem soluções não triviais quando
$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{A^2} \quad \text{com } n \in \mathbb{N}_1,$$
sendo as soluções dadas, a menos de uma constante multiplicativa, por
$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right).$$
Temos agora, para cada $n \in \mathbb{N}_1$,
$$Y'' = \frac{n^2\pi^2}{A^2}Y.$$
Resolvendo esta equação homogénea de 2ª ordem obtemos
$$Y(y) = c_1 e^{-\frac{n\pi}{A}y} + c_2 e^{\frac{n\pi}{A}y}.$$
Usando a condição $Y(B) = 0$, obtemos
$$c_1 e^{-\frac{n\pi}{A}B} + c_2 e^{\frac{n\pi}{A}B} = 0,$$
portanto
$$c_1 = ce^{\frac{n\pi}{A}B} \quad \text{e} \quad c_2 = -ce^{-\frac{n\pi}{A}B},$$
para alguma constante c. Donde
$$Y(y) = 2c \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{A}(B-y)\right)$$
As soluções $X(x)Y(y)$ que acabamos de obter,
$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right)\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{A}(B-y)\right),$$
a menos de uma constante multiplicativa, podem ser somadas para obter uma solução geral (formal) do problema (38.6):
$$u_1(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_{n,1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right)\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{A}(B-y)\right)$$
Vamos agora determinar os coeficientes $K_{n,1}$ de modo a obtermos uma solução que satisfaça a condição $u_1(x,0) = f_1(x)$. Obtemos
$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_{n,1} \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi B}{A}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right).$$

Reconhecendo a série de senos da função $f_1(x)$ concluímos

$$K_{n,1}\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi B}{A}\right) = \frac{2}{A}\int_0^A f_1(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right)\,dx,$$

ou seja[3]

$$K_{n,1} = \frac{2}{A\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi B}{A}\right)}\int_0^A f_1(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right)\,dx.$$

Do mesmo modo (ou usando as simetrias do problema) obtemos

$$u_2(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_{n,2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{B}(A-x)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{B}y\right)$$

com

$$K_{n,2} = \frac{2}{B\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi A}{B}\right)}\int_0^B f_2(y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{B}y\right)\,dx,$$

$$u_3(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_{n,3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right)\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{A}y\right)$$

com

$$K_{n,3} = \frac{2}{A\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi B}{A}\right)}\int_0^A f_3(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{A}x\right)\,dx,$$

e

$$u_4(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_{n,4}\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{B}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{B}y\right)$$

com

$$K_{n,4} = \frac{2}{B\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi A}{B}\right)}\int_0^B f_4(y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{B}y\right)\,dx.$$

Chegamos assim, através de (38.5), à solução do problema (38.4).

[3] Note-se que apesar de $\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{A}(B-y)\right)$ crescer exponencialmente com n, o produto $K_{n,1}\,\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{A}(B-y)\right)$ é limitado; e decresce exponencialmente com n para $y \neq 0$.