Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 1

Entregar na Aula de 23 de Setembro de 2003

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $p \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém p e um homeomorfismo $\psi : V \to M \cap U$, onde $V \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto, tal que ψ é uma aplicação diferenciável e para todo o $q \in V$ a derivada $\psi'(q) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injectiva. Mostre que M é uma variedade de dimensão k. Diz-se que M é uma k-**superfície** em $\mathbb{R}^n$ e que ψ é uma **parametrização** de M. No caso $k = 1$, dizemos que M é uma **curva**, no caso $k = 2$ dizemos que M é uma **superfície**, e no caso $k = n - 1$ dizemos que M é uma **hipersuperfície**.

2. Verifique que, se M e N são variedades diferenciáveis e $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ é uma aplicação diferenciável.

3. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por
$$\Phi([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(yz, xz, xy).$$
Mostre que Φ é uma aplicação diferenciável e verifique que é uma imersão, excepto em exactamente 6 pontos. Esboce a imagem de Φ.

4. Mostre que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k-superfície sse é uma subvariedade mergulhada.

5. Mostre que, se (N, Φ) é uma subvariedade de M, com $\Phi : N \to M$ uma aplicação própria (i.e., $\Phi^{-1}(K) \subset N$ é compacto, sempre que $K \subset M$ é compacto), então N é uma subvariedade mergulhada. Conclua que se N é compacta, então N é uma subvariedade mergulhada.

6. Mostre que uma imersão bijectiva $\Phi : N \to M$ é um difeomorfismo. Se N não possui uma base contável, mostre que isto pode ser falso.