Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Cursos LEAM, LEB, LEEC, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEQ, LQ

Teste de Recuperação - 5 de Janeiro de 2005

Enunciado

1º Teste

1. Considere o sólido
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x < 1\,;\, 0 < y < x\,;\, 0 < z < 2 - x^2\}.$$

(3.5 val.) (a) Calcule $\displaystyle\iiint_S xy$.

(3.5 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\displaystyle\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots}\int_{\cdots}^{\cdots} dydxdz.$

(4 val.) 2. Use uma mudança de variáveis adequada para calcular a massa do sólido
$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 + z^2 < 1\,;\, z > 0\right\},$$
cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = z$.

3. Considere o campo vectorial $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por
$$G(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2} + x + y^2\,,\, -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + 2xy\right).$$

(2 val.) (a) Mostre que G é um campo fechado;

(4 val.) (b) Determine, justificando, se G é um gradiente em cada uma das seguintes regiões:

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$;

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$;

(iii) $\mathbb{R}^2 \setminus L$, em que L é o segmento de recta que une $(0,0)$ a $(1,0)$.

(3 val.) 4. Considere o seguinte campo vectorial $F(x,y) = (-\varphi(y), \varphi(x))$, onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por
$$\varphi(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{u} e^{s^2}\, ds.$$
Mostre que $\displaystyle\int_C F \geq 2$, em que C é a circunferência
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 1\right\},$$
percorrida no sentido anti-horário.

2º Teste

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^3 - 3y + x^2 + z^2 = 0\}.$$

(2.5 val.) (a) Mostre que S é uma variedade e determine a sua dimensão;

(3 val.) (b) Determine o espaço normal e o espaço tangente no ponto $(1, 1, 1)$;

(3 val.) (c) Calcule a massa da intersecção de S com o plano $y = 1$, sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = x^2$.

(4 val.) 2. Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (\alpha(y), \alpha(x), z)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \, ; \, 1 < z < 2\}$$

segundo a normal com terceira componente negativa, sabendo que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

(4.5 val.) 3. Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (0, 0, 1)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \, ; \, z < 3 - 2y\}$$

segundo a normal com terceira componente negativa.

(3 val.) 4. Seja

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} + 1 \le y \le 2x - 1\right\}.$$

Estude a integrabilidade da função $f : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{(2y - x)^2 (2x - y)^2}.$$

Caso f seja integrável determine um majorante para $\displaystyle\int_S f$.