Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Cursos LEAM, LEB, LEEC, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEQ, LQ

1º Teste - 30 de Outubro de 2004

Resolução

1. Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \leq x \leq 1 \; , \; 0 \leq y \leq \pi \; , \; 0 \leq z \leq \mathrm{e}^x\} \; .$$

3.5 val. (a) Calcule o integral $\iiint_S \sin y$.

3.5 val. (b) Dada uma função integrável, f, em S escreva uma expressão para $\iiint_S f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f \, dx \right) dy \right) dz \; .$$

Resolução:

(a) A região S é constituída pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y) no rectângulo $[0, 1] \times [0, \pi]$ e com coordenada z entre o plano $z = 0$ e a superfície $z = e^x$. Como esta superfície se obtém transladando o gráfico da exponencial (no plano xOz) ao longo do eixo Oy, obtemos o seguinte esboço:

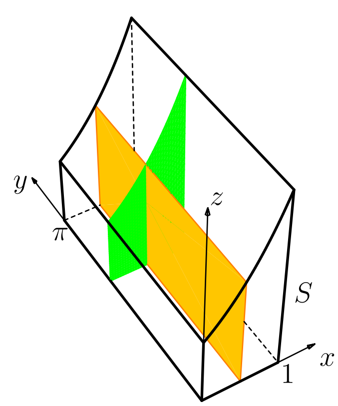

Figura 1:

O integral pedido pode ser calculado facilmente por um integral iterado na ordem $dz \; dx \; dy$. De facto, se fixarmos $y \in [0, \pi]$, obtemos os seguintes cortes verticais:

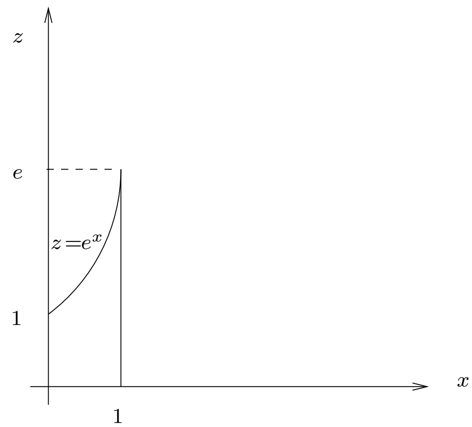

Figura 2: Corte em S segundo y constante com $0 < y < \pi$

e então o integral pedido é o seguinte:

$$\begin{aligned}
\iiint_S \sin y &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{e^x} \sin y \; dz \right) dx \right) dy \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^1 (e^x \sin y)\, dx \right) dy \\
&= \int_0^\pi [e^x \sin y]_{x=0}^{x=1}\, dy \\
&= (e-1) \int_0^\pi \sin y\, dy = (e-1)[-\cos y]_{y=0}^{y=\pi} = 2(e-1).
\end{aligned}$$

(b) Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada z. Do esboço acima, é claro que, se fixarmos z, obtemos os seguintes cortes:

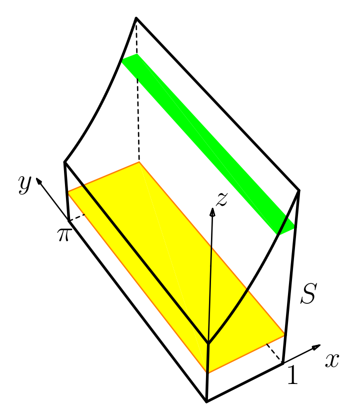

Figura 3:

Com efeito, se fixarmos $z \in [0,1]$, obtemos como corte um rectângulo com $x \in [0,1]$ e com $y \in [0,\pi]$:

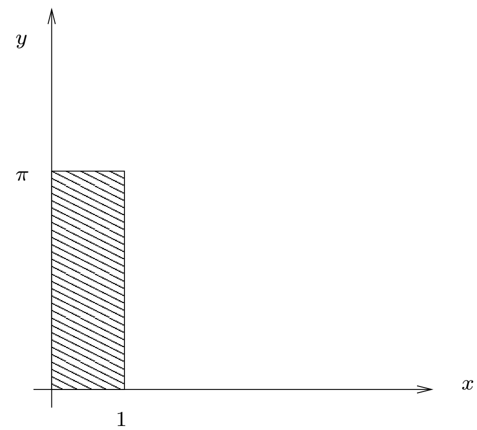

Figura 4: Corte em S segundo z constante com $0 < z < 1$.

Se fixarmos $z \in [1,e]$ obtemos como corte um rectângulo:

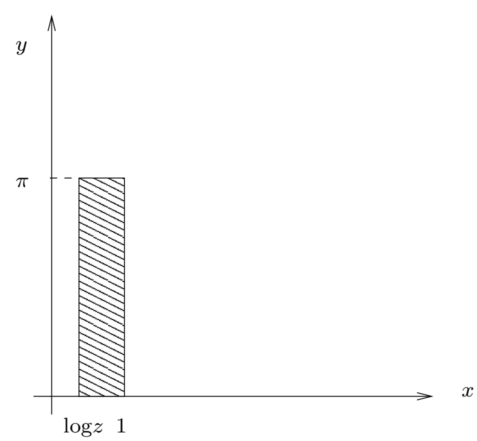

Figura 5: Corte em S segundo z constante com $1 < z < e$.

O integral iterado escreve-se então:

$$\iiint_S f = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^1 f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz + \\ + \int_1^e \left(\int_0^\pi \left(\int_{\log z}^1 f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz.$$

4 val. 2. Use coordenadas cilíndricas para calcular a coordenada $\overline{x}$ do centróide do seguinte sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < y < x\,;\ 1 - \sqrt{x^2+y^2} < z < 2 - 2(x^2+y^2)\}.$$

Resolução: O conjunto B é a região entre as superfícies de revolução $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 2 - 2(x^2+y^2)$:

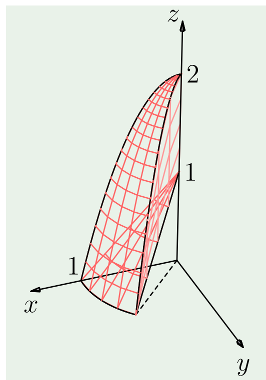

Figura 6:

Assim, vamos utilizar uma transformação $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de coordenadas cilíndricas em relação ao eixo Oz:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z. \end{cases}$$

O determinante da matriz Jacobiana desta transformação é então

$$|\det(Dg(\rho,\theta,z))| = \rho$$

e, nestas coordenadas, a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \{(\rho,\theta,y): \ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{4},\ 0 < \rho < 1,\ \ 1-\rho < z < 2-2\rho^2\}.$$

Assim, o volume do sólido B é dado por

$$\begin{aligned} Vol(B) &= \iiint_B 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{g^{-1}(B)} \rho\ dz\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\int_{1-\rho}^{2-2\rho^2} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \left(\rho+\rho^2-2\rho^3\right)d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

e a coordenada $\overline{x}$ do centróide é dada por:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{Vol(B)} \iiint_B x\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{Vol(B)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_{1-\rho}^{2-2\rho^2} \rho^2 \cos\theta \, dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \frac{1}{Vol(B)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \left(\rho^2 + \rho^3 - 2\rho^4\right) \cos\theta \; d\rho\, d\theta \\
&= \frac{1}{Vol(B)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left[\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} - 2\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\
&= \frac{1}{Vol(B)} \left([\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right)\right) \\
&= \frac{1}{Vol(B)} \frac{11\sqrt{2}}{120} = \frac{11\sqrt{2}}{10\pi}.
\end{aligned}$$

3. Considere o seguinte campo de forças definido em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ excepto nos pertencentes aos eixos Ox e Oy:

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{z}{x^2+z^2} \; , \; \frac{z}{y^2+z^2} \; , \; \frac{x}{x^2+z^2} - \frac{y}{y^2+z^2} \right) \; .$$

1.5 val. (a) Mostre que F é um campo fechado.

2 val. (b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva C_1 definida por $y=1$ e $x^2+z^2=1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(0,10,0)$.

2 val. (c) Calcule o trabalho de F ao longo da curva C_2 definida por $x=1$ e $y^2+z^2=1$, percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10,0,0)$.

1.5 val. (d) Calcule o trabalho de F ao longo da curva C_3 definida por $x=y$ e $x^2+y^2+z^2=1$ percorrida no sentido **anti-horário** para um observador colocado no ponto $(10,0,0)$.

Resolução:

(a) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0),\, (0,y,0)\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{z^2 - x^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\
\frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{y^2 - z^2}{(y^2+z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y},
\end{aligned}$$

pelo que F é um campo fechado no seu domínio.

(b) O campo F pode ser decomposto na soma de dois campos fechados G e H dados por

$$\begin{aligned}
G &= \left(-\frac{z}{x^2+z^2}, 0, \frac{x}{x^2+z^2}\right) \\
H &= \left(0, \frac{z}{y^2+z^2}, -\frac{y}{y^2+z^2}\right),
\end{aligned}$$

e então $\int_{C_1} F \cdot dg_1 = \int_{C_1} G \cdot dg_1 + \int_{C_1} H \cdot dg_1$.
Para calcular $\int_{C_1} H \cdot dg_1$ notamos que H é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0),\, x \in \mathbb{R}\}$ e que a linha C_1 está contida no conjunto em estrela

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > \frac{1}{2}\}.$$

Portanto, o campo H é um gradiente em S e, sendo $C_1 \subset S$ uma linha fechada, então

$$\int_{C_1} H \cdot dg_1 = 0.$$

Para calcular $\int_{C_1} G \cdot dg_1$ podemos usar, por exemplo, a parametrização de C_1 no sentido indicado dada por $g_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, com $g_1(\theta) = (\cos\theta, 1, -\sin\theta)$. Assim, o trabalho realizado por G ao longo de C_1 é dado por

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} G \cdot\ dg_1 &= \int_0^{2\pi} G(g_1(t)) \cdot g_1'(t)\ d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin\theta, 0, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, 0, -\cos\theta)\ d\theta = -2\pi,
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{C_1} F \cdot dg_1 = -2\pi + 0 = -2\pi.$$

(c) Novamente, $\int_{C_2} F \cdot\, dg_2 = \int_{C_2} G \cdot\, dg_2 + \int_{C_2} H \cdot\, dg_2$.

Para calcular $\int_{C_2} G \cdot dg_2$ notamos que G é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0),\, y \in \mathbb{R}\}$ e que a linha C_2 está contida no conjunto em estrela

$$T = \{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > \frac{1}{2}\}.$$

Portanto, o campo G é um gradiente em T e, sendo $C_2 \subset T$ uma linha fechada, então

$$\int_{C_1} G \cdot\, dg_1 = 0.$$

Para calcular $\int_{C_2} H \cdot\, dg_2$ podemos usar, por exemplo, a parametrização de C_2 no sentido indicado dada por $g_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, com $g_2(\theta) = (1, \cos\theta, \sin\theta)$. Assim, o trabalho realizado por H ao longo de C_2 é dado por

$$\begin{aligned}\int_{C_2} H \cdot\ dg_2 &= \int_0^{2\pi} H(g_2(t)) \cdot g_2'(t)\ d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (0, \sin\theta, -\cos\theta) \cdot (0, -\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta = -2\pi,\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{C_2} F \cdot\, dg_2 = 0 - 2\pi = -2\pi.$$

(d) Novamente temos $\int_{C_3} F \cdot dg = \int_{C_3} G \cdot dg_3 + \int_{C_3} H \cdot dg_3$.

Como G é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0),\, y \in \mathbb{R}\}$ e C_3 pode ser deformada, neste conjunto, de modo a obter a curva C_1 percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0, 10, 0)$, temos que

$$\int_{C_3} G \cdot dg_3 = -\int_{C_1} G \cdot\, dg_1 = 2\pi.$$

Por outro lado, H é um campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0),\, x \in \mathbb{R}\}$ e C_3 pode ser deformada, neste conjunto, de modo a obter a curva C_2 percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto $(10, 0, 0)$ e, portanto,

$$\int_{C_3} G \cdot dg_3 = \int_{C_2} G \cdot\, dg_2 = -2\pi.$$

Conclui-se então que $\int_{C_3} F \cdot dg = 2\pi - 2\pi = 0$.

2 val. 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+2y)\,,\; f(y)\right)$$

e o conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x < 1\,;\; \frac{\pi}{2} < x^2 + 2y < \pi\}.$$

Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da fronteira do conjunto D percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Resolução: O campo F é de classe C^1 em D e este conjunto é uma união de

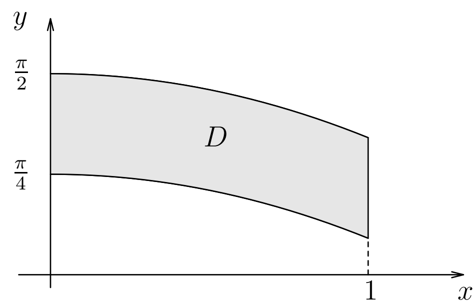

Figura 7:

um número finito de domínios elementares. Podemos então aplicar o teorema de Green, com $P(x,y) = \frac{1}{2}\sin\left(x^2+2y\right)$ e $Q(x,y) = f(y)$, e obter

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} F \cdot \, dg = \int_{\partial D} P dx + Q dy &= \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \\
&= -\int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{x^2}{2}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right) dx \\
&= -\int_0^1 \left[P(x,y)\right]_{y=\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{2}}^{y=\frac{\pi}{2}-\frac{x^2}{2}} \, dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$