Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEIC, LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 28 DE OUTUBRO DE 2006

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (11:00-12:30)

(1) Considere o sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 < x < 1 \, ; \, x < y < 1 \, ; \, 0 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\} \, .$$

(3.5 val.) (a) Calcule o integral $\iiint_S z$.

(3.5 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx \right) dy \right) dz \, .$$

(3 val.) (2) Calcule o volume do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) < z < \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \; x > 0, \; y > 0\}.$$

(3) Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ a curva definida por

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 2 - y, \; x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1\}.$$

(2 val.) Calcule a massa de Γ sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma = z$.

(4) Considere os campos vectoriais

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= (\text{sen}(xz)z, \, y, \, \text{sen}(xz)x) \qquad \text{e} \\ \mathbf{G}(x,y,z) &= \left(-\frac{2y}{x^2+y^2}, \, \frac{2x}{x^2+y^2}, \, 0\right). \end{aligned}$$

(2.5 val.) a) Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo fechado e indique, justificando, se $\mathbf{F}$ é um gradiente no seu domínio. Em caso afirmativo determine um potencial escalar.

(1.5 val.) b) Calcule $\int_\Gamma (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}$ onde Γ é a curva definida por $z = 2 - y$ e $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$, percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

(1 val.) c) Obtenha uma equação que descreva todos os pontos P tais que, se C é uma curva regular com pontos inicial e final $(0,0,1)$ e P, então $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = 1$.

(3 val.) (5) Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $f(x,y) = 0$ na fronteira de D. Mostre que $\iint_D f \Delta f \; \leq 0$, onde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.