Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT, LEIC E LMAC
TESTE DE RECUPERAÇÃO 2
5 DE JANEIRO DE 2007

Apresente e justifique todos os cálculos

Duração: hora e meia (11:00-12:30)

(1) Considere o conjunto

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + z^2 = 6 \right\}.$$

(2.5 val.) (a) Mostre que V é uma variedade e indique a sua dimensão.

(3 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente $T_{(\sqrt{2},0,2)}V$ e outra para o espaço normal $\left(T_{(\sqrt{2},0,2)}V\right)^{\perp}$.

(2.5 val.) (c) Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o máximo e o mínimo absolutos da função $f(x, y, z) = x + y$ na intersecção de V com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(2) Seja S a superfície:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2;\ 0 < z < 1\}.$$

(3 val.) a) Calcule pela definição o fluxo do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ através de S no sentido da normal ν cuja terceira componente é negativa.

(3 val.) b) Confirme o resultado na alínea anterior, aplicando o teorema da divergência a um sólido apropriado.

(3 val.) (3) Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4;\ y > 0;\ 0 < z < 1\},$$

e o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xz, -x^2z + z, y)$. Aplique o teorema de Stokes para calcular o integral de linha $\int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde ∂M é percorrida uma vez no sentido horário, quando visto da origem.

(3 val.) (4) Considere as superfícies

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 + z^2 = 1,\ x > 2 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 + z^2 = 1,\ x < -2 \right\}.$$

Encontre um campo vectorial $\mathbf{H}$ de classe C^1 numa vizinhança de $S_1 \cup S_2$, tal que

$$\int_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n_1}\, dS = 4 \text{ Área}(S_1) \quad \text{e} \quad \int_{S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n_2}\, dS = 4 \text{ Área}(S_2),$$

onde $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$ são as normais unitárias de S_1 e S_2 com primeiras componentes negativa e positiva, respectivamente.