Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Exame/2º Teste - 25 de Junho de 2003 - 9h

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ limitado pelos planos descritos pelas equações

$$x + y = 1 \; ; \; y = z \; ; \; y = \frac{1}{2}$$

e situado no primeiro octante.

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados nas formas seguintes

$$\iiint dxdydz \;\; ; \; \iiint dzdydx$$

(2 val.) (b) Calcule o integral $\displaystyle\int_V \frac{1}{1-y}$.

(2 val.) **2.** Calcule o momento de inércia relativo ao eixo Oz do sólido S descrito por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \, ; \, 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\,\}$$

e cuja densidade de massa é constante e igual a um.

3. Considere o campo vectorial definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{3x^2y^3}{x^6 + y^6} \, , \, -\frac{3x^3y^2}{x^6 + y^6} \right)$$

(1 val.) (a) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho

$$\gamma(t) = \Big((\cos t)^{1/3} \, , \, (\operatorname{sen} t)^{1/3} \Big) \;\; ; \;\; 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

(0.5 val.) (b) Mostre que F é um campo fechado.

(1 val.) (c) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do segmento de recta que une os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(1.5 val.) (d) Determine, justificadamente, se F é um campo gradiente no seu domínio.

(Continua no verso...)

Início do 2º Teste

4. Seja L o conjunto definido pelas duas equações

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y + z &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(1.5 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine o espaço normal e o espaço tangente a L no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\,;\ -1 < z < 1\,\}$$

(2.5 val.) (a) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(x + e^{y^2+z^2}\ ,\ y + \operatorname{sen}(xz)\ ,\ 1 - z\right)$$

através da superfície S no sentido da normal unitária $n : S \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz $n(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 1, 0)$.

(2.5 val.) (b) Usando o teorema de Stokes calcule o fluxo do campo vectorial

$$G(x, y, z) = (y, 2z, 1)$$

através da superfície S no sentido da normal unitária $n : S \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz $n(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 1, 0)$.

(1.5 val.) **6.** Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)(1 - \cos(x + y))\, e^{-(x^2+y^2)^2}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$ e determine um majorante para o respectivo integral.