

Análise Matemática III

1º Exame/2º Teste - 25 de Junho de 2003 - 9h

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

Resolução

1. (a) O conjunto V está representado na figura 1.

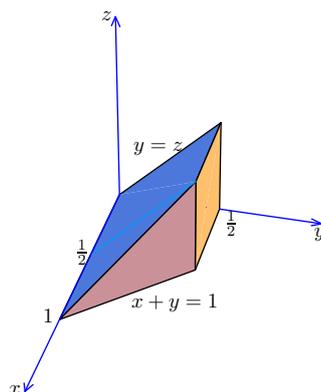


Figura 1: O conjunto V

Os cortes perpendiculares ao eixo Oz , com $0 < z < \frac{1}{2}$, encontram-se representados na figura 2.

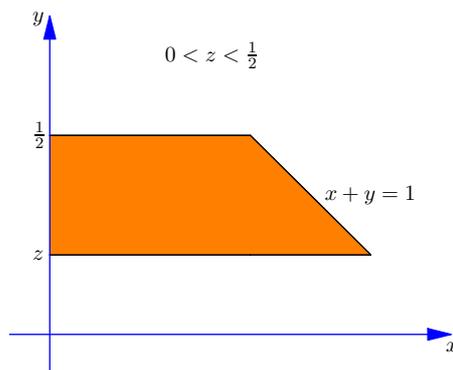


Figura 2: Cortes em V perpendiculares ao eixo Oz

Desta figura concluímos imediatamente que

$$\text{vol}(V) = \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} \int_0^{1-y} dx dy dz$$

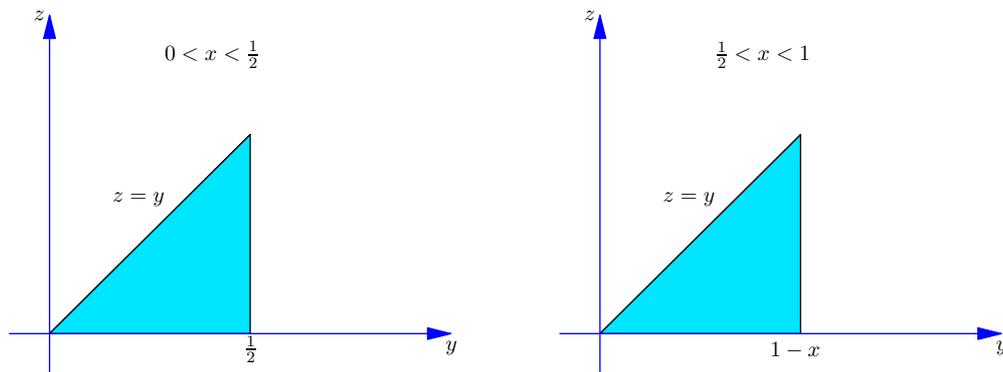


Figura 3: Cortes em V perpendiculares ao eixo Ox

Os cortes perpendiculares ao eixo Ox são de dois tipos: um para $0 < x < \frac{1}{2}$ e outro para $\frac{1}{2} < x < 1$, como se representa na figura 3.

Portanto, temos

$$\text{vol}(V) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \int_0^y dz dy dx + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} \int_0^y dz dy dx$$

(b) Usando o integral iterado da forma $\iiint(\dots) dx dy dz$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{1-y} &= \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} \int_0^{1-y} \frac{1}{1-y} dx dy dz \\ &= \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} \frac{1}{1-y} (1-y) dy dz \\ &= \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} dy dz \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - z\right) dz = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2. Podemos usar coordenadas cilíndricas para descrever a região S . Sendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, o conjunto S resulta de uma revolução em torno do eixo Oz da figura representada na figura 4.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta ; y = \rho \sin \theta ; z = z \\ 0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 < \theta < 2\pi ; z < \rho < \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

Dado que a densidade de massa é igual a um, o momento de inércia relativo ao eixo Oz do sólido S é dado pelo integral

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2)$$

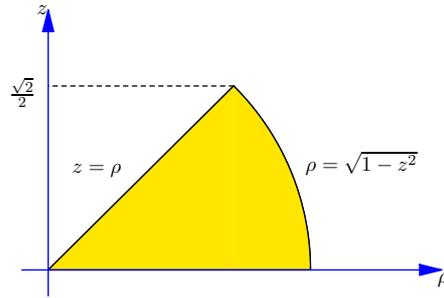


Figura 4:

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{2\pi} \int_z^{\sqrt{1-z^2}} \rho^2 \rho \, d\rho d\theta dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} ((1-z^2)^2 - z^4) dz \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - 2z^2) dz \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{6}
 \end{aligned}$$

3. (a) O trabalho do campo F ao longo do caminho γ é o integral de linha de F em γ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3(\cos t)^{2/3} \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, -\frac{3 \cos t (\sin t)^{2/3}}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} (\cos t)^{-2/3} \sin t, \frac{1}{2} (\sin t)^{-2/3} \cos t \right) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Note-se que a derivada de γ não está definida nos pontos $t = 0$; $t = \frac{\pi}{2}$, mas o integral existe.

- (b) Para mostrar que o campo $F = (F_1, F_2)$ é fechado devemos verificar a igualdade

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

De facto temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{-9x^2 y^2 (x^6 + y^6) + 18x^8 y^2}{(x^6 + y^6)^2} = \frac{9x^8 y^2 - 9x^2 y^8}{(x^6 + y^6)^2} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{9x^2 y^2 (x^6 + y^6) - 18x^2 y^8}{(x^6 + y^6)^2} = \frac{9x^8 y^2 - 9x^2 y^8}{(x^6 + y^6)^2}
 \end{aligned}$$

- (c) O segmento de recta R que une os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ e a curva C parametrizada por γ , são homotópicas no domínio do campo F , como pode ser visto na figura 5. Note-se que $\gamma(0) = (1,0)$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$. Da alínea anterior sabemos que F é fechado no seu domínio e, portanto, podemos concluir que o trabalho realizado pelo campo F ao longo do segmento R é dado por

$$\int_R F \cdot dg = \int_C f \cdot d\gamma = -\frac{\pi}{2}$$

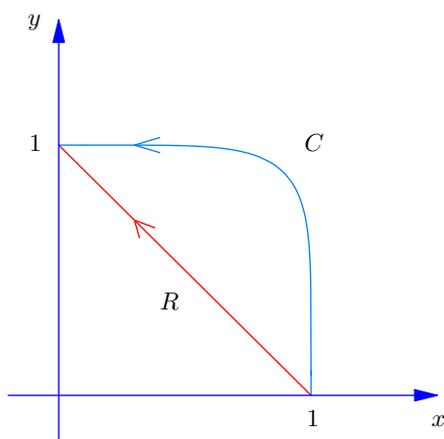


Figura 5:

- (d) Se o trabalho realizado por F ao longo de um caminho fechado, em torno da origem, for diferente de zero concluiremos que F não é um gradiente. Assim, consideremos a curva Γ descrita pelo caminho fechado

$$\gamma(t) = \left((\cos t)^{1/3}, (\sin t)^{1/3} \right) ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

e representada na figura 6. Note-se que γ não é diferenciável nos pontos

$$t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi, t = \frac{3\pi}{2}, t = 2\pi$$

No entanto, trata-se de um caminho seccionalmente de classe C^1 e, tal como na alínea (a), temos

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -1$$

e, portanto,

$$\int_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = -2\pi$$

Portanto o campo F não é um gradiente.

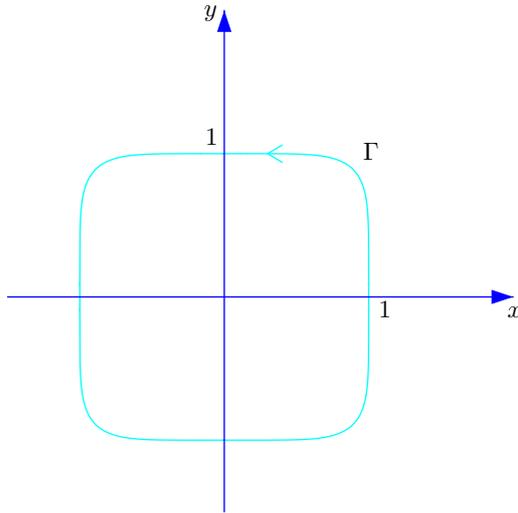


Figura 6:

4. (a) Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 4, x + y + z - 2\sqrt{2})$$

Trata-se de uma função de classe C^1 em \mathbb{R}^3 tal que

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0)\}$$

A respectiva derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois e, portanto, podemos concluir que L é uma variedade de dimensão igual a um.

- (b) O espaço normal a L no ponto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ é gerado pelas linhas da matriz

$$DF(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, é dado por

$$\begin{aligned} (T_P L)^\perp &= \{\alpha(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0) + \beta(1, 1, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\sqrt{2}\alpha + \beta, 2\sqrt{2}\alpha + \beta, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Portanto, o espaço normal a L no ponto P é o plano definido pela equação $x = y$. Seja $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vector do espaço tangente a L no ponto P . Então temos

$$\begin{cases} (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0) \cdot v = 0 \\ (1, 1, 1) \cdot v = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}v_1 + 2\sqrt{2}v_2, 0 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que devemos ter

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Assim, uma base para o espaço tangente $T_P L$ é constituída pelo vector $(1, -1, 0)$. Portanto, o espaço tangente é a recta definida pelas equações $x = -y$; $z = 0$.

5. (a) Vamos usar o teorema da divergência aplicado ao domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2; -1 < z < 1\}$$

A fronteira ∂D de D é constituída pelas três superfícies S, T_1, T_2 em que

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; z = -1\} \\ T_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; z = 1\} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_S F \cdot \nu_S + \int_{T_1} F \cdot \nu_1 + \int_{T_2} F \cdot \nu_2$$

em que ν é a normal exterior a D .

Note-se que a normal que satisfaz $\nu(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 1, 0)$ é a normal exterior a D .

Dado que $\operatorname{div} F = 1 + 1 - 1 = 1$, o fluxo pretendido é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_D \operatorname{div} F - \int_{T_1} F \cdot \nu_1 - \int_{T_2} F \cdot \nu_2 \\ &= \operatorname{vol}(D) - \int_{T_1} F \cdot \nu_1 - \int_{T_2} F \cdot \nu_2 \end{aligned}$$

O volume de D pode ser calculado usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta; y = \rho \sin \theta; z = z \\ 0 < \theta < 2\pi; -1 < z < 1; 0 < \rho < \sqrt{2 - z^2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(D) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (2 - z^2) \, dz \, d\theta \\ &= \frac{10\pi}{3} \end{aligned}$$

Sendo T_1 um plano horizontal, a normal ν_1 é o vector $(0, 0, -1)$. Assim, temos $F \cdot \nu_1 = -2$ e,

$$\int_{T_1} F \cdot \nu_1 = -2 \operatorname{área}(T_1) = -2\pi$$

Do mesmo modo temos $\nu_2 = (0, 0, 1)$ e $F \cdot \nu_2 = 0$, ou seja

$$\int_{T_2} F \cdot \nu_2 = 0$$

Finalmente obtemos

$$\int_S F \cdot \nu = \frac{10\pi}{3} + 2\pi = \frac{16\pi}{3}$$

- (b) Começamos por observar que $\operatorname{div}G = 0$ e que o domínio de G é \mathbb{R}^3 que é um conjunto em estrela. Logo, existe um campo vectorial A tal que $\operatorname{rot}A = G$. Para determinar o campo A devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 2z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

Escolhendo $A_3 = 0$, das duas primeiras equações deduzimos,

$$\begin{aligned} A_2 &= -yz + C_2(x, y) \\ A_1 &= z^2 + C_1(x, y) \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação, obtemos

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial y} = 1$$

Escolhendo $C_1 = 0$, teremos $C_2 = x$ e, portanto,

$$A(x, y, z) = (z^2, x - yz, 0)$$

Podemos aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de G através de S da seguinte forma

$$\int_S G \cdot \nu = \int_S \operatorname{rot}A \cdot \nu = \int_{C_1} A \cdot d\gamma_1 + \int_{C_2} A \cdot d\gamma_2$$

onde

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 ; z = -1\} \\ C_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 ; z = 1\} \end{aligned}$$

O sentido compatível com a normal ν deve ser o sentido horário para C_2 e o sentido anti-horário para C_1 , ou seja, as respectivas parametrizações devem ser as seguintes

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, -1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

e, portanto, os integrais de linha serão dados por

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} A \cdot d\gamma_1 &= \int_0^{2\pi} A(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1, \cos t + \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t + \cos^2 t + \cos t \operatorname{sen} t) dt \\
 &= \left(\cos t + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

e por

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} A \cdot d\gamma_2 &= \int_0^{2\pi} A(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1, \cos t + \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t - \cos^2 t - \cos t \operatorname{sen} t) dt \\
 &= \left(\cos t - \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -\pi
 \end{aligned}$$

Adicionando os dois integrais, temos

$$\int_S G \cdot \nu = \pi - \pi = 0$$

6. Notemos que

$$|f(x, y)| = (x^2 + y^2) |1 - \cos(x + y)| e^{-(x^2 + y^2)^2} \leq 2(x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)^2}$$

Portanto, se a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = 2(x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)^2}$$

for integrável em \mathbb{R}^2 , então a função f também o será. Para provar que h é integrável em \mathbb{R}^2 , usamos o teorema da convergência monótona. Para isso, consideremos a sucessão de funções $\{h_k\}$ definidas por

$$h_k(x, y) = \begin{cases} h(x, y), & \text{se } x^2 + y^2 \leq k^2 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > k^2 \end{cases}$$

(i) Cada uma das funções h_k é integrável em \mathbb{R}^2 , pois é contínua no compacto

$$B_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq k^2\}$$

e nula em $\mathbb{R}^2 \setminus B_k$.

(ii) A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque h é positiva.

(iii) A sucessão de integrais $\{\int_{\mathbb{R}^2} h_k\}$ é majorada. De facto, usando coordenadas polares em \mathbb{R}^2 , temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} h_k &= \int_{B_k} h &= \int_0^{2\pi} \int_0^k 2r^2 e^{-r^4} r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^k 2r^3 e^{-r^4} \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{-e^{-r^4}}{2} \right|_0^k d\theta \\ &= \pi(1 - e^{-k^4}) \leq \pi \end{aligned}$$

(iv) Por construção, é claro que $h_k \rightarrow h$.

Pelo teorema da convergência monótona podemos concluir que h é integrável em \mathbb{R}^2 e que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_k = \pi$$

Portanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f| \leq \int_{\mathbb{R}^2} h = \pi$$