Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE DE RECUPERAÇÃO 2

18 DE JUNHO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00h - 10:30h)

(1) Considere a superfície

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1, \; z > 0, \; x > 0, \; y > 0 \right\}.$$

(2.5 val.) (a) Determine o espaço normal e o espaço tangente a T no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

(3.5 val.) (b) Calcule o momento de inércia de T relativo ao eixo $0z$, sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}.$$

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + z^2 = 1 + y^2 \; ; \; -1 < y < 1 \right\},$$

com a normal n que no ponto $(0, 0, 1)$ é dada por $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Seja F o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = (-z + \operatorname{sen}(\pi y), y^3, x).$$

(4 val.) (a) Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal n.

(3 val.) (b) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal n.

(4 val.) (c) Usando a definição, calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (x, -y, z)$ através de S no sentido da normal n.

(3) Seja M o conjunto dado por

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \int_0^1 \operatorname{sen}(zt) e^{xt^2} \, dt + \int_0^1 \cos(zt) e^{yt^2} \, dt = 1 \right\}.$$

(1.5 val.) (a) Mostre que existe uma vizinhança V do ponto $(0, 0, 0)$, um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma função f de classe C^1 tal que

$$M \cap V = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U \right\}.$$

(1.5 val.) (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0, 0, 0)$.