**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# ANÁLISE MATEMÁTICA III

## TESTE 2 - **VERSÃO A**

9 DE JUNHO DE 2005

**apresente e justifique todos os cálculos**

duração: hora e meia (19:00 - 20:30)

(1) Considere o seguinte conjunto
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2+z^2 = 1+x^2,\ 1 < x < 3\right\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que $M$ é uma variedade. Qual a sua dimensão?

(3 val.) (b) Calcule a massa de $M$ sabendo que a densidade de massa é dada por
$$\alpha(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

(3 val.) (c) Determine o ponto da intersecção de $M$ com o plano $x = 2$ que está mais próximo do ponto $(3,3,3)$.

(2) Considere a variedade de dimensão 2
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \sqrt{y^2+z^2}\ ;\ 1 < x < 2\right\},$$
com a normal $n$ que tem a primeira componente positiva e os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por
$$F(x,y,z) = (2x-2, y, 3z + \arctan x^3 y) \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = (x^2+x, -2xy, -z).$$

(4 val.) (a) Calcule o fluxo de $F$ através de $S$ no sentido da normal $n$.

(4 val.) (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de $G$ através de $S$ no sentido da normal $n$.

(3) Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$h(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f \; dx\, dy\, dz$$
onde $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é a função definida por
$$f(x,y,z,t) = \frac{e^{-(y^2+z^2)}\cos(t+x+y+z)}{1+x^2}$$

(2 val.) (a) Mostre que $h$ está bem definida, ou seja, o integral $\int_{\mathbb{R}^3} f$ existe para cada $t \in \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Encontre um majorante para $|h'(0)|$.

RESOLUÇÃO:

1.(a) Consideremos a função $\phi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 < x < 3\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x,y,z) = y^2 + z^2 - 1 - x^2.$$

Esta função é de classe $C^1$, o conjunto $M$ é o conjunto de nível zero de $\phi$ e a sua derivada é dada por

$$D\phi = \begin{bmatrix} -2x & 2y & 2z \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem característica igual a 1 em todos os pontos de $M$, logo podemos concluir que $M$ é uma variedade de dimensão 2.

1.(b) Uma parametrização para $M$ é a função $g : T \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x,\theta) = (x, \sqrt{1+x^2}\cos\theta, \sqrt{1+x^2}\operatorname{sen}\theta)$$

em que $T = ]1,3[\times]0,2\pi[$.

Sendo

$$Dg(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\theta & -\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{sen}\theta & \sqrt{1+x^2}\cos\theta \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\det Dg^t(x,\theta)Dg(x,\theta) = 1 + 2x^2.$$

Assim, a massa de $M$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_M \alpha = \iint_T \alpha(g(x,\theta))\sqrt{\det Dg^t Dg}\, dx\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\sqrt{1+2x^2}\, dx\, d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

1.(c) A intersecção de $M$ com o plano $x = 2$ é uma circunferência $C$ definida pelas equações $F(x,y,z) = (y^2+z^2-x^2-1, x-2) = (0,0)$. Como $C$ é uma variedade (de dimensão 1) podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Assim consideramos a função

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2,$$

que representa o quadrado da distância do ponto $(x,y,z)$ ao ponto $(3,3,3)$, e a função $g$ definida por

$$g(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda_1(y^2+z^2-1-x^2) + \lambda_2(x-2).$$

A solução do problema é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla g = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

Portanto temos

$$\begin{cases} 2(x-3) - 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2(y-3) + 2\lambda_1 y = 0 \\ 2(z-3) + 2\lambda_1 z = 0 \\ y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Da segunda e terceira equações concluimos que $y = z$. Substituindo na quarta equação e usando $x = 2$, facilmente concluimos que $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Logo obtemos os pontos

$$\left(2, \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(2, -\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Como $C$ é uma variedade compacta e $f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2$ é uma função contínua podemos concluir, pelo Teorema de Weierstrass, que f tem máximo e mínimo em $C$. Calculando $f\left(2, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 24 \mp 6\sqrt{10}$ concluimos que a solução do problema é o ponto $\left(2, \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

2.(a) Vamos utilizar o teorema da divergência. Seja $V$ o volume limitado por $S$ e pelas tampas

$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y^2 + z^2 < 4\}$ e $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y^2 + z^2 < 1\}$.

A normal exterior a $V$ em $D_1$ é dada por $\nu_1 = (1,0,0)$, em $D_2$ por $(-1,0,0)$ e em $S$ coincide com $-n$. Logo,

$$\int_V \operatorname{div} F = -\int_S F \cdot n + \int_{D_1} F \cdot \nu_1 + \int_{D_2} F \cdot \nu_2.$$

Temos $\operatorname{div} F = 6$ e

$$\int_V \operatorname{div} F = 6Vol(V) = 6\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^x \rho \, d\rho \, dx \, d\theta = 14\pi.$$

Temos $F \cdot \nu_1 = 2x - 2 = 2$ em $D_1$, pelo que $\int_{D_1} F \cdot \nu_1 = 8\pi$. Temos $F \cdot \nu_2 = -2x + 2 = 0$ em $D_2$, pelo que $\int_{D_1} F \cdot \nu_2 = 0$. Logo, pela equação acima, o fluxo é dado por

$$\int_S F \cdot n = -14\pi + 8\pi + 0 = -6\pi.$$

2.(b) Temos $\operatorname{div} G = 0$. Como o domínio de $G$ é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, existe um potencial vector $H$, tal que $\operatorname{rot} H = G$. Podemos tomar $H_x = 0$ e obtemos,

$$\begin{cases} \partial_2 H_3 - \partial_3 H_2 & = G_1 = & x^2 + x \\ -\partial_1 H_3 & = G_2 = -2xy & \\ \partial_1 H_2 & = G_3 = & -z \end{cases}$$

Obtemos $H_2 = -xz + \alpha(y,z), H_3 = x^2 y + \beta(y,z)$ e $x^2 + \partial_2\alpha + x - \partial_3\beta = x^2 + x$, pelo que tomamos $\alpha = \beta = 0$ e $H = (0, -xz, x^2 y)$.

O bordo de $S$ é constituído pelas circunferências

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y^2 + z^2 = 4\} \quad \text{e}$$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y^2 + z^2 = 1\}.$$

A orientação do bordo de $s$ consistente com a normal $n$ é dada percorrendo $A$ no sentido anti-horário e $B$ no sentido horário, do ponto de vista de um observador colocado no ponto $(10,0,0)$. Temos então, com estas orientações e pelo teorema de Stokes,

$$\int_S G \cdot n = \oint_A H + \oint_B H.$$

Parametrizamos $A$ com $g(\theta) = (2, 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta), \theta \in ]0, 2\pi[$ e $B$ com $l(\theta) = (1, \cos\theta, -\operatorname{sen}\theta), \theta \in ]0, 2\pi[$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_S G \cdot n &= \oint_A H + \oint_B H = \\
&= \int_0^{2\pi} (0, -4\operatorname{sen}\theta, 8\cos\theta) \cdot (0, -2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta) d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} (0, \operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \cdot (0, -\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (7 + 8\cos^2\theta) d\theta = 22\pi.
\end{aligned}$$

3.(a) Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos

$$|f(x,y,z,t)| = \left| \frac{e^{-(y^2+z^2)}\cos(t+x+y+z)}{1+x^2} \right| \le \frac{e^{-(y^2+z^2)}}{1+x^2} = g(x,y,z).$$

Se a função $g$ for integrável em $\mathbb{R}^3$, então o integral $\int_{\mathbb{R}^3} f$ estará bem definido para cada $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sucessão de funções definidas por

$$g_k(x,y,z) = \begin{cases} g(x,y,z), & \text{se} -k \le x \le k\,;\, y^2 + z^2 \le k^2 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, cada função $g_k$ coincide com $g$ no cilindro com eixo de simetria $Ox$, de raio $k$ e de altura $2k$.

Dado que $g > 0$, a sucessão $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente e, por construção, $g_k \to g$ quando $k \to \infty$.

Para além disso, usando as coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, x)$ tais que

$$\rho^2 = y^2 + z^2\,;\; y = \rho\cos\theta\,;\; z = \rho\operatorname{sen}\theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} g_k &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-k}^{k}\left(\int_0^k \rho\frac{e^{-\rho^2}}{1+x^2}\,d\rho\right)dx\right)d\theta\\ &= \pi\left(\int_{-k}^{k}\frac{1}{1+x^2}\,dx\right)\left(\int_0^k 2\rho e^{-\rho^2}\,d\rho\right)\\ &= \pi\left[\arctan k-\arctan(-k)\right]\left[1-e^{-k^2}\right],\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3} g_k=\pi^2.$$

Estão, assim, verificadas as condições do teorema da convergência monótona e, portanto, a função $g$ é integrável e $\int_{\mathbb{R}^3} g=\pi^2$. Portanto, a função $h$ está bem definida.

3.(b) Note-se que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t)\right|=\left|-\frac{e^{-(y^2+z^2)}\operatorname{sen}(t+x+y+z)}{1+x^2}\right|\leq\frac{e^{-(y^2+z^2)}}{1+x^2}=g(x,y,z).$$

Assim, tendo em conta a alínea anterior, estamos em condições de usar a regra de Leibniz, ou seja,

$$h'(t)=\int\int\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz$$

e, portanto,

$$|h'(0)|\leq\int\int\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,0)\right|dx\,dy\,dz\leq\int\int\int_{\mathbb{R}^3} g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\pi^2.$$