Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# Análise Matemática III

Teste de Recuperação (A) - 12 de Junho de 2006
Duração: 1h30m

## Teste I

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < x + y\,;\ 0 < x < 1\,;\ 0 < y < 1\}.$$

(2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de $S$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

(2 val.) b) Escreva uma expressão para o volume de $S$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

(2 val.) c) Calcule $\int_S y$.

(3 val.) 2. Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o momento de inércia relativo ao eixo $Oz$ do sólido $S$ cuja densidade de massa é constante e igual a $1$, descrito por:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x > 0\,; y > 0\,; x^2 + y^2 \leq 1\,; 0 < z < \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}\right\}.$$

(2 val.) 3. Calcule a massa do segmento da recta que une os pontos $(1,1)$ e $(0,2)$ e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y) = \dfrac{1}{y}$.

4. Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y + 2xz^3, x, 3x^2z^2)$.

(3 val.) (a) Justifique que $\mathbf{F}$ é um campo gradiente no seu domínio <u>sem calcular um potencial</u>.

(3 val.) (b) Calcule o integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de uma curva regular com início no ponto $(0,0,0)$ e fim no ponto $(-1,0,1)$.

(3 val.) 5. Determine as constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ para as quais é válida a igualdade

$$\int_D f\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\ dxdydzdt = c\ \int_a^b f(s)\ ds,$$

onde $f$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$D = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ 0 < \frac{1}{x} < y < \frac{3}{x};\ 2x < y < 4x;\ 0 < z < \frac{y}{x};\ 0 < t < \frac{3y}{x}\right\}.$$

## Teste II

(2 val.) 1. Mostre que o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{xy+z} + \log(z + xy) = e\}$$

é o gráfico de uma função em torno do ponto $(0, 0, 1)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x(z^3 - z) + 4(y - 1)^2 = 4\right\}.$$

(3 val.) a) Mostre que $M$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

(3 val.) b) Obtenha o espaço normal a $M$ e o espaço tangente a $M$ no ponto $(-1, 2, 1)$.

(3 val.) 3. Calcule a massa da superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x^2 + z^2 + 1\,;\ 2 < y < 3\right\},$$

sabendo que a densidade de massa é $\sigma = \dfrac{y}{\sqrt{2y^2 - 1}}$.

(4 val.) 4. a) Use o Teorema da Divergência e o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ para calcular o volume do sólido

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > \sqrt{y^2 + z^2}\,;\ x^2 + y^2 + z^2 < 4\right\}.$$

(2 val.) b) Use o Teorema de Stokes para calcular o integral de linha de $\mathbf{F}$ (num sentido à sua escolha) ao longo da curva fechada

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{y^2 + z^2}\,;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

(3 val.) 5. Seja $n > 0$ e considere o conjunto $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Mostre que, se $f$ é uma função de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^n$ tal que div grad$f(\mathbf{x}) = 0$ no interior de $D^n$ e $f(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x} \in \partial D^n$, então $f$ é a função nula em $D^n$.