Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Teste de Recuperação (B) - 12 de Junho de 2006
Duração: 1h30m

Teste I

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2 - x - y\,;\, 0 < x < 1\,;\, 0 < y < 1\}.$$

(2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

(2 val.) b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

(2 val.) c) Calcule $\int_S x$.

(3 val.) 2. Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido S descrito por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > |x|\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\,;\, 0 < z < \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}\right\},$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = x^2 + y^2$.

(2 val.) 3. Calcule a massa do segmento da recta que une os pontos $(1,1)$ e $(2,0)$ e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y) = \dfrac{1}{x}$.

4. Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz^3, x, 3x^2z^2)$.

(3 val.) a) Justifique que $\mathbf{F}$ não é um campo gradiente no seu domínio.

(3 val.) b) Calcule o integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo do segmento de recta com início no ponto $(0,0,0)$ e fim no ponto $(-1,0,1)$.

(3 val.) 5. Determine as constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ para as quais é válida a igualdade

$$\int_D f\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\, dxdydzdt = c \int_a^b f(s)\, ds,$$

onde f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$D = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 0 < \frac{2}{x} < y < \frac{5}{x};\; x < y < 2x;\; 0 < z < \frac{2y}{x};\; 0 < t < \frac{3y}{x}\right\}.$$

Teste II

(2 val.) 1. Mostre que o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{xz+y} + \log(y + xz) = e\}$$

é o gráfico de uma função em torno do ponto $(0, 1, 0)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y(z^3 - z) + 4(x - 1)^2 = 4\right\}.$$

(3 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(3 val.) b) Obtenha o espaço normal a M e o espaço tangente a M no ponto $(2, 0, 1)$.

(3 val.) 3. Calcule a massa da superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 = y^2 + z^2 - 1 \,;\, 1 < x < 2\right\},$$

sabendo que a densidade de massa é a função $\sigma = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

(4 val.) 4. a) Use o Teorema da Divergência e o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ para calcular o volume do sólido

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > \sqrt{x^2 + z^2} \,;\, x^2 + y^2 + z^2 < 9\right\}.$$

(2 val.) b) Use o Teorema de Stokes para calcular o integral de linha de $\mathbf{F}$ (num sentido à sua escolha) ao longo da curva fechada

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2} \,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\}.$$

(3 val.) 5. Seja $n > 0$ e considere o conjunto $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\mathbf{x}\| \le 1\}$. Mostre que, se f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ tal que div grad$f(\mathbf{x}) = 0$ no interior de D^n e grad$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ para cada $\mathbf{x} \in \partial D^n$, então f é a função nula em D^n.