Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste (A) - 29 de Abril de 2006

Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 2 - x - y\,;\, 0 < x < 1\,;\, 0 < y < 1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

Resolução:

Da definição de S vem imediatamente,

$$\text{vol}(S) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2-x-y} dz \right) dy \right) dx.$$

*****

(3 val.) b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

Resolução:

Sendo $x > 0$ e $y > 0$ é claro que $0 < z < 2$. Fixando z entre 0 e 2, temos

$$0 < x < 1\,;\, 0 < y < 1\,;\, x + y < 2 - z$$

e deveremos considerar dois casos:

i) $2 - z < 1 \Leftrightarrow 1 < z < 2$ e, portanto, $0 < y < 2 - z\,;\, 0 < x < 2 - y - z$.

ii) $2 - z > 1 \Leftrightarrow 0 < z < 1$. Neste caso, a recta $x + y = 2 - z$ intersecta a recta $x = 1$ para $y = 1 - z$. Assim, teremos duas regiões de integração:
$0 < z < 1\,;\, 0 < y < 1 - z\,;\, 0 < x < 1$.
$0 < z < 1\,;\, 1 - z < y < 1\,;\, 0 < x < 2 - y - z$.

O volume de S será então dado por

$$\begin{aligned}\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^1 dx \right) dy \right) dz + \int_0^1 \left(\int_{1-z}^1 \left(\int_0^{2-y-z} dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^{2-z} \left(\int_0^{2-y-z} dx \right) dy \right) dz\end{aligned}$$

*****

(2 val.) c) Calcule $\displaystyle\int_S f$ em que $f(x,y,z)=x$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\int_S f &= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^{2-x-y} x\,dz\right)dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1 x(2-x-y)dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left(2x-x^2-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

*****

(3 val.) 2. Calcule o momento de inércia, relativo ao eixo Oy, do sólido descrito pelas inequações

$$x^2+y^2+z^2<1\,;\;0<y<\sqrt{x^2+z^2},$$

considerando a densidade de massa constante e igual a um.

Resolução:

Usando coordenadas esféricas

$$x=r\cdot\operatorname{sen}(\phi)\cdot\operatorname{sen}(\theta)\,;\;y=r\cdot\cos(\phi)\,;\;z=r\cdot\operatorname{sen}(\phi)\cdot\cos(\theta),$$

com $r>0, -\pi<\theta<\pi$ e $0<\phi<\pi$, a menos de um conjunto de medida nula, o sólido é a imagem da região $\{(r,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<r<1\,;\,-\pi<\theta<\pi\,;\,\pi/4<\phi<\pi/2\}$. Logo o momento de inércia é dado por

$$\begin{aligned}\int_S(x^2+z^2) &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 (r\cdot\operatorname{sen}\phi)^2\cdot r^2\operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta\\ &= \frac{2\pi}{5}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1-\cos^2\phi\right)\operatorname{sen}\phi\,d\phi\\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}\pi\end{aligned}$$

*****

3. Considere os campos vectoriais

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{xy}{1+x},-\log(1+x)\right)\quad\text{e}\quad\mathbf{G}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(3 val.) a) Mostre que o campo vectorial $\mathbf{G}$ é um campo gradiente e determine a respectiva função potencial ϕ tal que $\phi(1,0)=0$.

Resolução:

O campo $\mathbf{G}$ é fechado:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

No entanto, o seu domínio, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, não é simplesmente conexo, pelo que não podemos concluir imediatamente que $\mathbf{G}$ é um gradiente. Para mostrar que $\mathbf{G}$ é um gradiente, podemos por exemplo calcular

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g},$$

onde C é a circunferência de raio 1 centrada na origem; se este integral for nulo então $\mathbf{G}$ será necessariamente um gradiente, uma vez que qualquer curva fechada no domínio de $\mathbf{G}$ pode ser deformada na curva C (percorrida um certo número de vezes), e consequentemente o integral de $\mathbf{G}$ ao longo de qualquer curva fechada será zero. Escolhendo a parametrização $\mathbf{g} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ de C dada por $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ temos então

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0,
\end{aligned}$$

pelo que $\mathbf{G}$ é de facto um gradiente.

Para encontrar a expressão geral do potencial ϕ de $\mathbf{G}$ basta resolver o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = G_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = G_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(x,y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C(y) \\[2ex] \dfrac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

donde se conclui que $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + D$ para alguma constante $D \in \mathbb{R}$. O potencial que satisfaz $\phi(1,0)=0$ corresponde a

$$\frac{1}{2}\log(1) + D = 0 \Leftrightarrow D = 0.$$

Note-se que bastaria ter encontrado a expressão do potencial ϕ para resolver esta questão.

*****

(3 val.) b) Considere as linhas

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{16}\} \text{ e } C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{9}{16}\},$$

percorridas no sentido anti-horário.

Calcule

$$\int_{C_2} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}_2 - \int_{C_1} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}_1.$$

Resolução:

Os integrais do campo $\mathbf{G}$ são nulos, porque $\mathbf{G}$ é um campo gradiente. Para calcular os integrais do campo $\mathbf{F}$, observamos que estes correspondem a integrar $\mathbf{F}$ na fronteira da região Ω compreendida entre as circunferências de raios $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, respectivamente, centradas na origem e no sentido requerido pelo Teorema de Green. Aplicando este teorema temos então

$$\begin{aligned}
\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_2 - \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_1 &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_\Omega \left(-\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x} \right) dxdy \\
&= \iint_\Omega (-1) dxdy = -V_2(\Omega) = -\left(\frac{9\pi}{16} - \frac{\pi}{16} \right) = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

*****

(3 val.) 4. Seja F um campo vectorial de classe C^1, fechado no conjunto $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1)\}$. Seja L_1 o segmento de recta do ponto $P_1 = (-1,0)$ para o ponto $P_2 = (0,0)$. Mostre que para qualquer linha L_2, de classe C^1, com início em P_1 e fim em P_2, existem $\alpha \in \mathbb{R}$, independente de L_2, e $n \in \mathbb{Z}$ (dependente de L_2 se $\alpha \neq 0$), tais que

$$\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_2 = \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_1 + \alpha n.$$

Resolução:

Existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que o caminho fechado Γ, obtido percorrendo primeiro L_2 como indicado e depois L_1 no sentido oposto ao indicado, i.e. com início em P_2 e fim em P_1, é homotópico em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1)\}$ ao caminho fechado C_n correspondente a percorrer a circunferência,

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1\right\},$$

n vezes no sentido anti-horário.

Note-se que percorrer C um número negativo de vezes, $n = -m < 0$, no sentido anti-horário, significa percorrer a mesma curva m vezes no sentido horário. Por outro lado, $n = 0$ corresponde à situação em que L_2 é homotópica a L_1. Nesse caso o caminho fechado Γ é homotópico a um ponto em D (designado por C_0) pelo que $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_\Gamma = 0$. Como o campo F é de classe C^1 e fechado em D, temos

$$\begin{aligned}\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_2} - \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_1} &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_\Gamma = \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_{C_n}} = \\ &= n \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_{C_1}}.\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_{C_1}}$, obtemos a igualdade pretendida.