Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste (B) - 29 de Abril de 2006

Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1\,;\, 0 < y < x\,;\, 0 < z < 1 + 2y\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

Resolução:

Da definição de S vem imediatamente,

$$\text{vol}(S) = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{1+2y} dz\right) dy\right) dx.$$

*****

(3 val.) b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dy\right) dx\right) dz$.

Resolução:

Sendo $x > 0$ e $y > 0$ é claro que $0 < z < 3$. Fixando z entre 0 e 3, temos

$$0 < x < 1\,;\, \frac{z-1}{2} < y < x$$

e deveremos considerar dois casos:

i) $z - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < z < 1$ e, portanto, $0 < x < 1\,;\, 0 < y < x$.

ii) $z - 1 > 0 \Leftrightarrow 1 < z < 3$ e, portanto, $\frac{z-1}{2} < x < 1\,;\, \frac{z-1}{2} < y < x$.

Assim, o volume de S será dado por

$$\text{vol}(S) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x dy\right) dx\right) dz + \int_1^3 \left(\int_{\frac{z-1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{z-1}{2}}^x dy\right) dx\right) dz.$$

*****

(2 val.) c) Calcule $\int_S f$ em que $f(x,y,z) = x$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\int_S f &= \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{1+2y} x\, dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x x(1+2y) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 (x^2 + x^3) dx = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

*****

(3 val.) 2. Calcule o momento de inércia, relativo ao eixo Ox, do sólido descrito pelas inequações

$$(y^2+z^2)^2 < x < 1 + y^2 + z^2 \ ; \ y^2 + z^2 < 1,$$

considerando a densidade de massa constante e igual a um.

Resolução:

Usando coordenadas cilíndricas

$$y = \rho \cdot \cos(\theta) \, ; \, z = \rho \cdot \mathrm{sen}(\theta) \, ; \, x = x$$

com $\rho > 0, -\pi < \theta < \pi$, a menos de um conjunto de medida nula, o sólido é a imagem da região $\{(\rho, \theta, x) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \rho < 1 \, ; \, -\pi < \theta < \pi \, ; \, \rho^4 < x < 1+\rho^2\}$. Logo o momento de inércia é dado por

$$\begin{aligned}
\int_S (y^2+z^2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{\rho^4}^{1+\rho^2} \rho^2 \cdot \rho \, dx \, d\rho \, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3 (1 + \rho^2 - \rho^4) \, dx \\
&= \frac{7}{12} \pi
\end{aligned}$$

*****

3. Considere os campos vectoriais

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\log(1+y) \, , \, \frac{xy}{1+y} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \, , \, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

(3 val.) a) Mostre que os campos vectoriais $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ não são gradientes nos respectivos domínios.

Resolução:

O campo $\mathbf{F}$ nem sequer é fechado:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y}{1+y} \neq -\frac{1}{1+y} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Portanto $\mathbf{F}$ não é gradiente.

O campo $\mathbf{G}$ é fechado:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

No entanto, o seu domínio, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, não é simplesmente conexo, pelo que nada poderemos concluir. Para mostrar que $\mathbf{G}$ não é um gradiente podemos, por exemplo, calcular

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g},$$

onde C é a circunferência de raio 1 centrada na origem. Se este integral não for nulo então $\mathbf{G}$ não poderá ser um gradiente. Escolhendo a parametrização $\mathbf{g} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ de C, dada por $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, temos então

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0,
\end{aligned}$$

pelo que $\mathbf{G}$ não é um gradiente.

*****

(3 val.) b) Considere as linhas

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{9}\} \text{ e } C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{4}{9}\},$$

percorridas no sentido anti-horário.

Calcule

$$\int_{C_2} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}_2 - \int_{C_1} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{g}_1.$$

Resolução:

Dado que o campo $\mathbf{F}$ não é fechado, para calcular os integrais de $\mathbf{F}+\mathbf{G}$, observamos que estes correspondem a integrar $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ na fronteira da região Ω, compreendida entre as circunferências centradas na origem, de raios $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente, e percorridas no sentido requerido pelo teorema de Green. Aplicando este teorema e notando que o campo $\mathbf{G}$ é fechado, temos então

$$\begin{aligned}
\oint_{C_2} (\mathbf{F}+\mathbf{G}) \cdot \mathbf{dg_2} - \oint_{\mathbf{C_1}} (\mathbf{F}+\mathbf{G}) \cdot \mathbf{dg_1} &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{y}{1+y} + \frac{1}{1+y} \right) dxdy \\
&= \iint_\Omega 1 \, dxdy \\
&= \frac{4\pi}{9} - \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

*****

(3 val.) 4. Seja F um campo vectorial de classe C^1, fechado no conjunto $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$. Seja L_1 o segmento de recta do ponto $P_1 = (0,0)$ para o ponto $P_2 = (1,0)$. Mostre que para qualquer linha L_2, de classe C^1, com início em P_1 e fim em P_2, existem $\alpha \in \mathbb{R}$, independente de L_2, e $n \in \mathbb{Z}$ (dependente de L_2 se $\alpha \neq 0$), tais que

$$\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_2 = \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_1 + \alpha n.$$

Resolução:

Existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que o caminho fechado Γ, obtido percorrendo primeiro L_2 como indicado e depois L_1 no sentido oposto ao indicado, i.e. com início em P_2 e fim em P_1, é homotópico em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ ao caminho fechado C_n correspondente a percorrer a circunferência,

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \right\},$$

n vezes no sentido anti-horário.

Note-se que percorrer C um número negativo de vezes, $n = -m < 0$, no sentido anti-horário, significa percorrer a mesma curva m vezes no sentido horário. Por outro lado, $n = 0$ corresponde à situação em que L_2 é homotópica a L_1. Nesse caso o caminho fechado Γ é homotópico a um ponto em D (designado por C_0) pelo que $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_\Gamma = 0$.

Como o campo F é de classe C^1 e fechado em D, temos

$$\begin{aligned}
\int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_2} - \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_1} &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_\Gamma = \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_{C_n}} = \\
&= n \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g_{C_1}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}_{\mathbf{C_1}}$, obtemos a igualdade pretendida.