Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste (A) - 03 de Junho de 2006

Duração: 1h30m

Resolução

1. Considere conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, e^{xy} + \log(z + x) = 1\}.$$

(2 val.) (a) Prove que existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^3$ do ponto $(0, 1, 1)$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(1, 1)$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$L \cap U = \{(f(y, z), y, z) : \, (y, z) \in V\}.$$

(2 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1)$.

Resolução:

(a) Consideremos a função $F(x, y, z) = e^{xy} + \log(z + x) - 1$. Facilmente se conclui que F é de classe C^1 no seu domínio e que $F(0, 1, 1) = 0$. Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 1) = (ye^{xy} + \frac{1}{z + x})_{|(0,1,1)} = 2 \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^3$ do ponto $(0, 1, 1)$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(1, 1)$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$L \cap U = \{(f(y, z), y, z) : \, (y, z) \in V\},$$

ou seja, L é o gráfico $x = f(y, z)$ em torno do ponto $(0, 1, 1)$.

(b) Da alínea anterior sabemos que, em torno do ponto $(0, 1, 1)$, temos

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = f(y, z),$$

ou seja, $F(f(y, z), y, z) = 0$ e, derivando esta equação em ordem a z, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 1)\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 1) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 1)} = -\frac{1}{2}.$$

****

2. Considere os conjuntos

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 3\}$$
$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5\,;\, x = 0\}\,.$$

(2 val.) a) Mostre que M e N são variedades e determine as respectivas dimensões.

(2 val.) b) Mostre que o espaço normal de M no ponto $(0,-1,1)$ coincide com o espaço tangente de N no mesmo ponto.

Resolução:

a) M é o conjunto de nível 0 da função $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 3$, de classe C^1. Tem-se ainda:

$$\mathrm{car} DF(x,y,z) = \mathrm{car}[\ 2x \quad 4y \quad 2z\ ] = 1$$

para todos os pontos de M, porque caso contrário, $x = y = z = 0$, o que implicaria $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0 \neq 3$. Assim, M é uma variedade, com dimensão $3 - \mathrm{car}(DF) = 3 - 1 = 2$.

N é o conjunto de nível $(0,0)$ da função $G(x,y,z) = (x^2 + y^2 + (z-3)^2 - 5, x)$, de classe C^1. Tem-se ainda:

$$\mathrm{car} DG(x,y,z) = \mathrm{car} \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2(z-3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

para todos os pontos de N, porque caso contrário, $y = z - 3 = 0$, o que, juntamente com $x = 0$, implicaria $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 0 \neq 5$. Assim, N é uma variedade, com dimensão $3 - \mathrm{car}(DG) = 3 - 2 = 1$.

b)

$$DF(0,-1,1) = [\ 2x \quad 4y \quad 2z\ ]_{(0,-1,1)} = [\ 0 \quad -4 \quad 2\ ].$$

Portanto o espaço normal de M no ponto $(0,-1,1)$, gerado pelas linhas de DF, é dado por

$$T_{(0,-1,1)}M^{\perp} = \{c(0,-4,2) \ : \ c \in \mathbb{R}\}\,.$$

Da mesma maneira:

$$DG(0,-1,1) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2(z-3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(0,-1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto o espaço normal de N no ponto $(0,-1,1)$, gerado pelas linhas de DG, é dado por

$$T_{(0,-1,1)}N^{\perp} = \{c(0,-2,-4) + d(1,0,0) \ : \ c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

O espaço tangente de N pode ser obtido resolvendo o sistema de equações:

$$-2y - 4z = 0\,;\; x = 0.$$

Assim,

$$T_{(0,-1,1)}N = \{z(0,-2,1)\ :\ z \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto,

$$T_{(0,-1,1)}M^{\perp} = T_{(0,-1,1)}N.$$

*****

(3 val.) 3. Calcule o momento de inércia da superfície

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ y = x^2 + z^2 + 1,\ y < 2\right\},$$

em relação ao eixo Ox, sabendo que a densidade de massa é $\sigma = \dfrac{1}{(y^2+z^2)\sqrt{4y-3}}$.

Resolução:

A superfície M é o gráfico da função $f : U \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,z) = x^2 + z^2 + 1$, em que $U = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + z^2 < 1\}$. Portanto M tem uma parametrização $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x,z) = (x, x^2 + z^2 + 1, z)$. Como a distancia de um ponto $(x,y,z) \in M$ do eixo Ox é $\sqrt{y^2+z^2}$, segue-se que o momento de inércia é

$$\begin{aligned}
\int_M (y^2+z^2)\sigma &= \int_M \frac{y^2+z^2}{(y^2+z^2)\sqrt{4y-3}} \\
&= \int_U \frac{\sqrt{\det D\phi^t D\phi}}{\sqrt{4(x^2+z^2+1)-3}} \\
&= \int_U \sqrt{\frac{1+4x^2+4z^2}{4(x^2+z^2+1)-3}} \\
&= \int_U 1 = \text{área}(U) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

*****

4. Sejam $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ os campos vectoriais definidos por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, e^z)\ ; \quad \mathbf{G}(x,y,z) = \operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z).$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{G}$ através da superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\,;\ z > 0\right\}$$

na direcção da normal cuja terceira componente é positiva usando:

(3 val.) a) O Teorema da Divergência.

(3 val.) b) O Teorema de Stokes.

Resolução:

a) A superfície S é uma superfície cónica invertida de vértice no ponto $(0,0,1)$, que forma, juntamente com $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 \ \text{ e } \ z=0\}$, a fronteira de um aberto limitado U. Pelo Teorema da Divergência,

$$\iiint_U \operatorname{div} \mathbf{G} = \iint_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} + \iint_T \mathbf{G} \cdot \mathbf{n},$$

onde $\mathbf{n}$ designa a normal exterior a U. Em S, esta é precisamente a normal com terceira componente positiva. Em T, esta normal é constante igual a $(0,0,-1)$. Uma vez que

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0,$$

concluímos então que

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = -\iint_T \mathbf{G} \cdot (0,0,-1).$$

Ora

$$\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & e^z \end{vmatrix} = (0,0,2),$$

e portanto

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\iint_T (0,0,2) \cdot (0,0,-1) = \iint_T 2 = 2V_2(T) = 2\pi.$$

b) Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}.$$

O bordo de S é a circunferência $\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1 \ \text{ e } \ z=0\}$, com parametrização $\mathbf{g} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0).$$

A orientação induzida por esta parametrização em ∂S coincide com a induzida pela normal com terceira componente positiva. Daí que

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{g}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

*****

(3 val.) 5. Seja $n > 0$ e considere o aberto $D^n = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}$. Mostre que, para qualquer função f de classe C^2 com suporte em D^n (i.e., existe $0 < \epsilon < 1$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ se $\|x\| > \epsilon$), se tem

$$\int_{D^n} f(\mathbf{x})\big(\text{div grad } f(\mathbf{x})\big) = -\int_{D^n}\|\text{grad } f(\mathbf{x})\|^2.$$

Resolução:

Tem-se

$$\text{div}\,(f(\mathbf{x})\text{grad } f(\mathbf{x})) = (\text{grad } f(\mathbf{x}))\cdot(\text{grad } f(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})\,(\text{div grad } f(\mathbf{x}))$$

e grad $f(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x}\in\partial D^n$. Aplicando o teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial D^n}(f(\mathbf{x})\text{grad } f(\mathbf{x}))\cdot\nu \\ &= \int_{D^n}\text{div}\,(f(\mathbf{x})\text{grad } f(\mathbf{x})) \\ &= \int_{D^n}\left[(\text{grad } f(\mathbf{x}))\cdot(\text{grad } f(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})\,(\text{div grad } f(\mathbf{x}))\right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{D^n} f(\mathbf{x})\big(\text{div grad } f(\mathbf{x})\big) = -\int_{D^n}\|\text{grad } f(\mathbf{x})\|^2.$$

****