Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste (B) - 03 de Junho de 2006
Duração: 1h30m
Resolução

1. Considere conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \log(x + y) + e^{yz} = 1\}.$$

(2 val.) (a) Prove que existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^3$ do ponto $(1, 0, 1)$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(1, 1)$ e uma função $g : V \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$L \cap U = \{(x, g(x, z), z) : (x, z) \in V\}.$$

(2 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$.

Resolução:

(a) Consideremos a função $F(x, y, z) = \log(x+y) + e^{yz} - 1$. Facilmente se conclui que F é de classe C^1 no seu domínio e que $F(1, 0, 1) = 0$. Por outro lado,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{x + y} + ze^{yz}\right)_{|(1,0,1)} = 2 \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^3$ do ponto $(1, 0, 1)$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(1, 1)$ e uma função $g : V \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$L \cap U = \{(x, g(x, z), z) : (x, z) \in V\},$$

ou seja, L é o gráfico $y = g(x, z)$ em torno do ponto $(1, 0, 1)$.

(b) Da alínea anterior sabemos que, em torno do ponto $(1, 0, 1)$, temos

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = g(x, z),$$

ou seja, $F(x, g(x, z), z) = 0$ e, derivando esta equação em ordem a x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 1) + \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 1)\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 1)} = -\frac{1}{2}.$$

****

2. Considere os conjuntos

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 3\}$$
$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 5\,;\, x = 0\}.$$

(2 val.) a) Mostre que M e N são variedades e determine as respectivas dimensões.

(2 val.) b) Mostre que o espaço normal de M no ponto $(0,1,-1)$ coincide com o espaço tangente de N no mesmo ponto.

Resolução:

a) M é o conjunto de nível 0 da função $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 3$, de classe C^1. Tem-se ainda:

$$\mathrm{car} DF(x,y,z) = \mathrm{car}[\ 2x \quad 2y \quad 4z\ ] = 1$$

para todos os pontos de M, porque caso contrário, $x = y = z = 0$, o que implicaria $x^2 + y^2 + 2z^2 = 0 \neq 3$. Assim, M é uma variedade, com dimensão $3 - \mathrm{car}(DF) = 3 - 1 = 2$.

N é o conjunto de nível $(0,0)$ da função $G(x,y,z) = (x^2 + (y-3)^2 + z^2 - 5, x)$, de classe C^1. Tem-se ainda:

$$\mathrm{car}(DG) = \mathrm{car}\begin{bmatrix} 2x & 2(y-3) & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

para todos os pontos de N, porque caso contrário, $y - 3 = z = 0$, o que, juntamente com $x = 0$, implicaria $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 0 \neq 5$. Assim, N é uma variedade, com dimensão $3 - \mathrm{car}(DG) = 3 - 2 = 1$.

b)

$$DF(0,1,-1) = [\ 2x \quad 2y \quad 4z\ ]_{(0,1,-1)} = [\ 0 \quad 2 \quad -4\ ].$$

Portanto o espaço normal de M no ponto $(0,1,-1)$, gerado pelas linhas de $DF(0,1,-1)$, é dado por

$$T_{(0,1,-1)}M^{\perp} = \{c(0,2,-4)\ :\ c \in \mathbb{R}\}\ .$$

Da mesma maneira:

$$DG(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 2x & 2(y-3) & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(0,1,-1)} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto o espaço normal de N no ponto $(0,1,-1)$, gerado pelas linhas de $DG(0,1,-1)$, é dado por

$$T_{(0,1,-1)}N^{\perp} = \{c(0,-4,-2) + d(1,0,0)\ :\ c,d \in \mathbb{R}\}\ .$$

O espaço tangente de N pode ser obtido resolvendo o sistema de equações:

$$-4y - 2z = 0, \; x = 0.$$

Assim,

$$T_{(0,1,-1)}N = \{y(0,1,-2) \,:\, y \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto,

$$T_{(0,1,-1)}M^{\perp} = T_{(0,1,-1)}N.$$

****

(3 val.) 3. Calcule o momento de inércia da superfície

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = 1 - y^2 - z^2,\; x > 0\right\},$$

em relação ao eixo Oy, sabendo que a densidade de massa é $\sigma = \dfrac{1}{(x^2+z^2)\sqrt{5-4x}}$.

Resolução:

A superfície M é o gráfico da função $f : U \to \mathbb{R}$ dada por $f(y,z) = 1 - y^2 - z^2$, em que $U = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 + z^2 < 1\}$. Portanto M tem uma parametrização $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(y,z) = (1 - y^2 - z^2, y, z)$. Como a distância de um ponto $(x,y,z) \in M$ ao eixo Oy é $\sqrt{x^2+z^2}$, segue-se que o momento de inércia é

$$\begin{aligned}
\int_M (x^2+z^2)\sigma &= \int_M \frac{x^2+z^2}{(x^2+z^2)\sqrt{5-4x}} \\
&= \int_U \frac{\sqrt{\det D\phi^t D\phi}}{\sqrt{5-4(1-y^2-z^2)}} \\
&= \int_U \sqrt{\frac{1+4y^2+4z^2}{5-4(1-y^2-z^2)}} \\
&= \int_U 1 = \text{área}(U) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

****

4. Sejam $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ os campos vectoriais definidos por

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (y, -x, \cos(z)) \;; \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \operatorname{rot}\mathbf{G}(x,y,z).$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\,;\, z < 1\right\},$$

na direcção da normal cuja terceira componente é negativa, usando:

(3 val.) a) O Teorema de Stokes.

(3 val.) b) O Teorema da Divergência.

Resolução:

a) Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{G} = \oint_{\partial S} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{g}.$$

A superfície S é uma superfície cónica de vértice na origem, e o seu bordo é a circunferência $\partial S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \text{ e } z=1\}$, com parametrização $\mathbf{g}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1).$$

A orientação induzida por esta parametrização em ∂S, contudo, é contrária à induzida pela normal com terceira componente negativa. Daí que

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= -\int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{g}(t))\cdot\mathbf{g}'(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, -\cos t, \cos(1))\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

b) Seja $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1 \text{ e } z=1\}$, e U o aberto limitado cuja fronteira é $S\cup T$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\iiint_U \operatorname{div}\mathbf{F} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} + \iint_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n},$$

onde $\mathbf{n}$ designa a normal exterior a U. Em S, esta é precisamente a normal com terceira componente negativa. Em T, esta normal é constante igual a $(0,0,1)$. Uma vez que

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{G} = 0,$$

concluímos então que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\iint_T \mathbf{F}\cdot(0,0,1).$$

Ora

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & \cos(z) \end{vmatrix} = (0,0,-2),$$

e portanto

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\iint_T (0,0,-2)\cdot(0,0,1) = \iint_T 2 = 2V_2(T) = 2\pi.$$

*****

(3 val.) 5. Seja $n > 0$ e considere o aberto $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}$. Mostre que, para quaisquer funções f e g de classe C^2 com suporte em D^n (i.e., existe $0 < \epsilon < 1$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ e $g(\mathbf{x}) = 0$ se $\|x\| > \epsilon$), se tem

$$\int_{D^n} f(\mathbf{x})\big(\text{div grad } g(\mathbf{x})\big) = \int_{D^n} \big(\text{div grad } f(\mathbf{x})\big) g(\mathbf{x}).$$

Resolução:

Tem-se $\text{div}\,(f(\mathbf{x})\text{grad } g(\mathbf{x})) = (\text{grad } f(\mathbf{x})) \cdot (\text{grad } g(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})\,(\text{div grad } g(\mathbf{x}))$. Logo

$\text{div}\,(f(\mathbf{x})\text{grad } g(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})\,(\text{div grad } g(\mathbf{x})) = \text{div}\,(g(\mathbf{x})\text{grad } f(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x})\,(\text{div grad } f(\mathbf{x}))$

Como grad $f(\mathbf{x}) = 0$ e grad $g(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in \partial D^n$, aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{D^n} \text{div}\,(f(\mathbf{x})\text{grad } g(\mathbf{x})) = \int_{\partial D^n} (f(\mathbf{x})\text{grad } g(\mathbf{x})) \cdot \nu = 0$$
$$\int_{D^n} \text{div}\,(g(\mathbf{x})\text{grad } f(\mathbf{x})) = \int_{\partial D^n} (g(\mathbf{x})\text{grad } f(\mathbf{x})) \cdot \nu = 0.$$

Portanto,

$$\int_{D^n} f(\mathbf{x})\big(\text{div grad } g(\mathbf{x})\big) = \int_{D^n} \big(\text{div grad } f(\mathbf{x})\big) g(\mathbf{x}).$$

****