Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste - 2 de Junho de 2007 - 11h
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto:

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + y^2 - z^3 - z + 1 = 0 \ ; \ 1 < z < 3\right\} .$$

(3 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(3 val.) (b) Indique o espaço normal e o espaço tangente de M no ponto $(1, 3, 2)$.

(2 val.) (c) Justifique que a equação $(x-1)^2 + y^2 - z^3 - z + 1 = 0$ define z implicitamente como função de x e y, $z = f(x, y)$, com f de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(-2, 0, 2)$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 0)$.

(3 val.) 2. Calcule o momento de inércia à volta do eixo Oz da superfície:

$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 3\sqrt{x^2 + y^2} \, ; \, 0 < z < 1\right\} ,$$

considerando uma densidade de massa constante igual a 1 por unidade de área.

3. Considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 10 \, ; \, z < 3 \, ; \, y > -2\right\} ,$$

e o campo vectorial $F(x, y, z) = (x, -y + z, y)$, definido em $\mathbb{R}^3$.

(2 val.) (a) Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através de S segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0, \sqrt{10}, 0) = (0, 1, 0)$.

(2 val.) (b) Calcule um potencial vectorial $A = (A_1, A_2, A_3)$ para F, tal que $A_1 = 0$.

(2 val.) (c) Usando o Teorema de Stokes, calcule novamente o fluxo de F através de S no sentido indicado na primeira alínea. (Caso não tenha resolvido a alínea anterior, pode substituir F por um campo $\tilde{F}$, cujo potencial vectorial é $A = (0, xz, xz+xy)$).

(1,5 val.) 4. (a) Seja M uma variedade de dimensão d em $\mathbb{R}^n$, dada por um conjunto de nível duma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^1. Mostre que para qualquer $x \in M$ existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ de x e uma parametrização $g : T \to \mathbb{R}^n$ de $M \cap V$ (com $T \subset \mathbb{R}^d$ aberto), tal que $Dg(t)$ tem característica d, $\forall t \in T$.

(1,5 val.) (b) Mostre que o recíproco do resultado da alínea anterior é falso, i.e., mostre que existem exemplos de parametrizações $g : T \to \mathbb{R}^n$, tal que $T \subset \mathbb{R}^d$ é aberto, g é injectiva e de classe C^1, e $Dg(t)$ tem característica d, $\forall t \in T$, mas a imagem $g(T)$ não é uma variedade. (Pode pensar em contra-exemplos em $\mathbb{R}^2$).