4.(a) Como é dado que M é uma variedade de dimensão d, e que M é o conjunto de nível de uma função $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^1, podemos assumir que a característica de $DF(x)$ é $n-d$ nos pontos $x \in M$ (pelo menos localmente). Portanto existem $n-d$ colunas de $DF(x)$ linearmente independentes. Sem perda de generalidade, suponhamos então que as últimas $n-d$ colunas de $DF(x)$ são linearmente independentes, para um $x \in M$ fixo. Portando a matriz

$$D_{x_1,\cdots,x_{n-d}}F(x) = \begin{bmatrix} | & & | \\ \frac{\partial F}{\partial x_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Aplicando o Teorema da Função Implícita, concluimos que existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ do ponto x, um conjunto aberto $T \subset \mathbb{R}^d$ e uma função $f : T \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^1, tais que os pontos de $M \cap V$ satisfazem $(x_{d+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_d)$, i.e., $M \cap V$ é parametrizada por

$$g(x_1, \cdots, x_d) = (x_1, \cdots, x_d, f(x_1, \cdots, x_d)) \ .$$

(Note que o domínio de g é o mesmo de f.) A matriz derivada de g é

$$Dg = \begin{bmatrix} I \\ Df \end{bmatrix} \ ,$$

onde I denota a matriz identidade $d \times d$. Portanto Dg tem característica d.

4.(b) Considere-se, por exemplo, a função $g :]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(t) = (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t))$. Esta função é claramente de classe C^1 e a sua matriz derivada é

$$Dg(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix} \ .$$

Como $\cos(t)$ e $\cos(2t)$ nunca se anulam simultaneamente, conclui-se que a característica de $Dg(t)$ é sempre 1. No entanto, a imagem de g é um "8 deitado" – ver figura 1 – que não é uma variedade, porque não é possível descrever o conjunto $g(]0, 2\pi[)$ em torno da origem como o gráfico de uma função na variável x ou y.

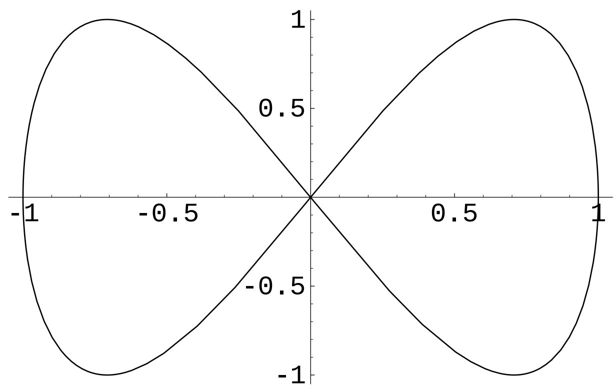

Figura 1: A imagem da parametrização g.

A injectividade de g segue das propriedades das funções trigonométricas, porque o domínio de g é o intervalo <u>aberto</u> $]0, 2\pi[$. (Se o domínio de g fosse $]0, 2\pi]$ ou $[0, 2\pi[$ ou $[0, 2\pi]$, g não seria injectiva pois $g(0) = g(2\pi) = g(\pi) = (0, 0)$.)