Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste de Recuperação - 18 de Junho de 2007 - 11h
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + (y-1)^4 = 1\,;\, x^2 + 2y^2 + z = 0\}\,.$$

(3 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(3 val.) (b) Indique uma base para o espaço tangente a M no ponto $(0,0,0)$ e outra base para o espaço normal a M no mesmo ponto.

(2 val.) 2. Considere a variedade $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9\}$. Determine o máximo e o mínimo absolutos da função $f(x,y) = x + y$ restrita a C.

(3 val.) 3. Seja $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 5 + x + 2y\,;\, 0 < x < 1\,;\, 0 < y < 1 - x\}$. Calcule a massa de N, sabendo que a densidade de massa por unidade de superfície é dada por $\delta(x,y,z) = 4 + x$.

4. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; 2(x^2+y^2) = z^2 + 1\,;\, 1 < z < \sqrt{7}\right\}\,,$$

e o campo vectorial $F(x,y,z) = (-yz, xz, 1)$, definido em $\mathbb{R}^3$.

(2 val.) (a) Exprima o fluxo de $\mathrm{rot} F$ através de S no sentido da normal unitária ν com terceira componente positiva, na forma de um integral duplo nas coordenadas cilíndricas ρ e θ (sem calcular esse integral).

(2 val.) (b) Calcule o fluxo $\iint_S \mathrm{rot} F.\,\nu$ da alínea anterior, usando o Teorema de Stokes.

(2 val.) (c) Calcule $\iint_S F.\,\nu$, usando o Teorema da Divergência.

(3 val.) 5. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^\alpha, & \|\mathbf{x}\| \le 1 \\ \|\mathbf{x}\|^\beta, & \|\mathbf{x}\| > 1 \end{cases}$$

onde $\mathbf{x} = (x,y,z)$, e α, β são constantes reais. Indique quais os valores de α, β tais que f é integrável em $\mathbb{R}^3$, enunciando os resultados que usar para justificar a integrabilidade de f. Calcule $\int_{\mathbb{R}^3} f$ para esses valores.