Estágio Topologia 15-18/7/08

http://www.math.ist.utl.pt/~rpicken/estagio/

Resumos

Curso I: Introdução à topologia e à teoria de nós (Roger Picken)

- Introdução pessoal, organizacão, enquadramento, IST.
- Topologia – novo tipo de matemática para os participantes, deformação elástica sem partir. Exemplo usando modelos em papel de uma fita normal e uma fita de Moebius. Observações sobre as diferenças entre as duas superfícies (Moebius: só uma componente da fronteira, só um lado, ou seja não pode ser pintada a duas cores). Lição: convém usar argumentos de coloração em topologia. A topologia procura captar o essencial.
- Introdução aos nós e enlaces, diagramas de nós, equivalência entre nós, equivalência entre diagramas (são diagramas de nós equivalentes), teorema de Reidemeister. Problema principal: algoritmo para concluir que dois diagramas de nós são equivalentes ou não. Exemplos: writhe (contorção) que não é um invariante porque falha Reid. I, número de enlace (linking number) para um enlace de duas componentes (exercício à tarde para mostrar que é um invariante).
- tri-coloração de diagramas de nós, indicação como se prova que ser tricolorível é um invariante sob movimentos de Reidemeister (novamente com exercícios na sessão da tarde). Assim prova-se que o não-nó (nó trivial) e o trifólio não são equivalentes.
- Polinómio de Conway. Definição através de uma relação para o polinómio para diagramas que diferem só numa região, mais uma relação de normalização. Exemplos do cálculo do polinómio para o enlace trivial, e o enlace de Hopf. Chamada de atenção para o facto de que é necessário ter uma definição independente (aqui o polinómio de Alexander) porque a definição usando relações entre diagramas pode ser inconsistente.

Curso II Grupos e tranças (Marco Mackaay)

- Grupos fazem parte da álgebra necessária para captar as propriedades topológicas. Números naturais incluindo 0, com adição de números. O elemento neutro é 0 (observação que demorou bastante até à descoberta do número 0, que se revelou também muito útil na notação 10, 100 etc.). Propriedade associativa. Z os números inteiros, com adição, admite ainda para cada elemento um inverso.
- Definição de um grupo, como sendo um conjunto com uma operação binária satisfazendo existência de um elemento neutro, associatividade e existência de um inverso para cada elemento. Exemplo dos números racionais, excluindo 0, com multiplicação usual..
- O conceito de um grupo permite provar factos que se verificam para cada exemplo de um grupo. Princípio filosófico em matemática: não só olhar para os objectos mas também para as relações entre eles. Definição de um homomorfismo f de (A,*) para (B,o). Exemplos com A=B=Z, f(x)=2x; A=R, B=R \ 0, f(x)=e^x.
- exemplo das rotações por múltiplos de um ângulo de 360/n graus, por exemplo n=3. Equivalência entre rotações que diferem por 360 graus. Reformulação como o grupo Z / 3Z.
- grupo de simetrias de um triângulo: grupo diedral D_3 cujos elementos são obtidos de \rho (=rotação por 120 graus) do exemplo anterior e uma reflexão \sigma: 1, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2 \sigma, t.q. \rho^3 =1, \sigma^2 =1 e \sigma \rho = \rho^2 \sigma.
- (no início da sessão prática) continuação dos grupos com o exemplo do grupo das permutações, descrito também diagramaticamente, e o grupo das tranças. Discussão da relação entre o fecho das tranças e os nós e enlaces.

Curso III Superfícies e a característica de Euler (Roger Picken)

- Exemplos de v-e+f=2 para o tetraedro e o cubo. Menção dos sólidos platónicos, tema de um dos exercícios da tarde. Cálculo usando uma representação planar da esfera como bígono, com os dois lados (arcos) identificados.
- cálculo da característica de Euler para o toro, usando uma representaçao planar rectangular com lados opostos identificados, dividido em dois triângulos.
- Esboço da garrafa de Klein, discussão da dificuldade de a representar em dimensão 3, analogias com os nós, diferença entre a topologia intrinseca e a topologia mergulhada num espaço ambiente.
- cálculo da característica de Euler da garrafa de Klein, desvio para falar sobre passeios na representação planar rectangular da garrafa de Klein, conduzindo a uma discussão do 3-toro como cubo sólido com faces opostas identificadas.
- Entrega de uma cópia de 4 páginas de Armstrong com uma demonstração interessante e acessível do teorema de Euler, e observação que essencialmente constava na prova que qualquer superfície satisfazendo a condiçao podia ser descrita como dois discos colados na sua fronteira (mostrando uma bola de ténis como ilustração).
- Respondendo a uma pergunta sobre se o tempo podia ser usado para representar dimensões adicionais, dei exemplos da representação de “movie” de uma 2-esfera, e a representação “movie” de uma superfície em dimensão 4.
- Observação que na aula de amanhã ia haver uma discussão sobre como distinguir o toro da garrafa de Klein

Referências: Armstrong, Basic Topology

Curso IV Homologia (Roger Picken)

- Da aula III: a característica de Euler, \chi, é invariante topológico, mas não distingue o toro da garrafa de Klein, ambos com \chi =0.
- Abordagem de Legendre para provar o teorema de Euler para o caso de um poliedro, que é fronteira de um sólido *convexo*. Discussão da noção de convexidade. A demonstração usa a fórmula: área de um n-gono numa esféra de raio 1 = (soma dos ângulos interiores) –n\pi + 2\pi. Somando as contribuições de todos os polígonos, obtém-se 4\pi = 2\pi v – 2\pi e + 2\pi f..
- partindo de uma superfície triangulada X, introduz-se a noção de 0-, 1- e 2-simplice, (a), (a,b) = -(b,a), (a,b,c)=(b,c,a)= -(b,a,c) etc.
- n-cadeias são expressões (para n=1) do género 2(a,b) + (-3)(b,c). As n-cadeias constituem um grupo isomorfo a Z \oplus Z ... (em número igual ao número de n-simplices).
- Noção do bordo de um simplice e de uma cadeia. Definição e exemplos de n-ciclos (n-cadeias cujo bordo é nulo).
- Equivalência entre n-ciclos: z_n e z'_n são equivalentes quando z_n= z'_n + bordo(c_{n+1}). O grupo de homologia H_n(X) é o grupo cujos elementos são os n-ciclos, a menos de equivalência, com adição de n-cadeias.
- A adição de n-ciclos está bem definida (situação análoga à adição de números mod n), um exemplo da chamada álgebra homológica.
- Não havia tempo para discutir o exemplo dos grupos de homologia do toro e da garrafa de Klein, deixados como exercício. De qualquer forma, são invariantes topológicos mais finos do que a característica de Euler, e distinguem entre estas duas superfícies.

Referências: Armstrong, Basic Topology

Teoria de nós e o polinómio de bracket (Louis Kauffman)

- Definição de um polinómio nas variáveis A, B, d, para diagramas não-orientados de nós. Exemplos do cálculo deste polinómio. Observação que o procedimento para o cálculo conduz a um polinómio bem-definido (independente da ordem em que as regras são aplicadas), através da introdução de uma soma de estados, mostrando depois que esta soma obedece a todas as regras..
- Utilidade do polinómio para a topologia (teoria de nós): impondo equações para B e d em função de A, o polinómio passa a ser invariante sob os movimentos de Reidemeister I-III, dando assim um invariante de nós.
- Propriedade deste polinómio para dois nós, imagens espelho um do outro. Problema em aberto: se o polinómio de um nó for igual a 1, isto implica que o nó é trivial? Observação que o polinómio obtido coincide com o polinómio de Jones depois de uma mudança de variável.
- Algumas observaçoes sobre as aplicações: ocorrência de nós em cadeias de polímeros, ADN, ligações com a física, particularmente a física quântica.

Topologia na Fábrica (Roger Picken)

- Motivado pelo objectivo de evitar colisões entre robôs a operar no mesmo espaço introduz-se a noção de espaço de configuração (de partículas não sobrepostas), com exemplos dos espaços de configurações de 2 ou 3 robôs no eixo real R.
- Noção de grafo, vértices, arestas, valência de um vértice, e discussão do espaço de configurações de dois robôs no grafo Y_3 com 3 arestas, um vértice 3-valente, e 3 vértices 1-valentes.
- Breve menção do aspecto complicado do espaço de configurações do grafo obtido de Y_3 unindo dois vértices 1-valentes num vértice 2-valente.
- introdução do espaço de configurações simplificado, onde as configurações de robôs devem ser tal que dois robôs não podem ter a distância de menos de uma aresta entre eles.
- Exemplo do espaço de configurações simplificado para dois robôs em Y_3. Observação que a dimensão deste espaço de configurações simplificado é mais baixa do que o espaço de configurações nâo-simplificado correspondente, e que é uma "retracção por deformação" daquele espaço (intuitivamente: como uma peça de roupa a encolher).
- Último exemplo sem detalhes do espaço de configurações simplificado de dois robôs no grafo K_5 (grafo completo de 5 vértices, não tem representação planar). Afirmação que este espaço de configurações simplificado é uma superfície de génerο 6.
- Finalmente uma observação breve sobre como as tranças com n fios podem ser interpretadas como caminhos ("filmes") no espaço de configurações de n-partículas em R^2.

Mas para que serve a Matemática? (Manuel Ricou)

Palestra completa em:
http://www.math.ist.utl.pt/~rpicken/estagio/ficheiros/SemanaTopologia_A.pdf

As figuras geométricas nas danças escocesas (Roger Picken)

- DVD com uma dança mostrando figuras (avançadas) das danças escosesas (Bonnie Anne, coreografia de Mary Isdale MacNab, executada por The Thornhill Dancers, música: Muriel Johnstone Ensemble)
- Com a ajuda de 5 voluntários, demonstração da estrutura de algumas figuras simples *(turn by the right hand for 4 bars, back to back, right hands across (2 couples and 3 couples), left hands across (2 couples), rights and lefts (2 couples).*
- Observação sobre a analogia entre as figuras e as tranças, e desafio para analisar as figuras matemáticamente. Porque neste terreno ainda não há trabalho feito, é uma oportunidade para fazer investigação matemática, criar algo de novo.
- Algumas figuras mais complicadadas: *rights and lefts for 3 couples, parallel reels of 3* (também com música).
- Observação que existem soluções estáveis do problema de três corpos onde os corpos executam um *reel of 3* (analogia com as conhecidas soluções astronómicas com dois corpos).
- Demonstração de um programa de diagramas animados AW Movies Editor: a figura *knot*, a dança Autumn in Appin com voz dando as instruções e com música (no ritmo lento strathspey). A dimensão tempo nos diagramas.
- Uma dança simples com música executada com mais dois voluntários: Scotch Mixer (para múltiplos de dois pares frente a frente: circle four hands round and back; dance right hands across then left hands across; *dance back to back with partner, turn opposite person by the right hand for 4 bars; with opposite person promenade for 8 bars to meet a new couple*).

O grupo fundamental (Gustavo Granja)

- Noções de espaço topológico, e de trajectória contínua num espaço topológico. Exemplos de espaços topológicos: R^2, R^3, o 2-toro, a 2-esfera, o espaço de configurações de k pontos em R^2, SO(3)= o conjunto de referenciais em R^3.
- O grupo fundamental serve para distinguir espaços; a dimensão também pode distinguir: a dimensão do espaço de configurações de k pontos em R^2 é 2k, a dimensão de SO(3) é 3.
- Dado um espaço topológico X e um ponto p de X, define-se um conjunto pi_1(X,p) como sendo o conjunto das trajectórias contínuas com início e fim no ponto p, mas identificando trajectórias que possam ser deformadas continuamente uma na outra.
- Noção da trajectória "estúpida" que não se afasta do ponto p, e exemplos de elementos de pi_1(X,p) iguais e diferentes. Operação de concatenação de duas trajectórias, seguindo a primeira e depois a segunda. O elemento identidade (neutro) é a trajectória "estúpida", com a propriedade que a concatenação desta trajectória com qualquer outra é igual à outra trajectória percorrida a uma velocidade diferente.
- Noção do inverso de uma trajectória, sendo a trajectória percorrida no sentido contrário. Observação que se deve distinguir a trajectória em si da sua imagem.
- Observação que a concatenação de uma trajectória com o seu inverso é a identidade (passa três vezes por p mas só tem de ficar presa em p no início e no fim.
- A associatividade da operação de concatenação vê-se de forma análoga à maneira como se vê que a trajectória "estúpida" é a identidade. Assim obtém-se um grupo, pi_1(X,p), o grupo fundamental de X.
- Exemplo do grupo fundamental de R^3, com só um elemento. Neste exemplo a operação é comutativa. Exemplo de X = R^2 com dois pontos retirados. Neste caso o grupo fundamental não é comutativa, e assim R^2 com dois pontos excluídos é diferente do cilíndro, cujo grupo fundamental é comutativo. Observação que o grupo fundamental distingue todas as superfícies fechadas orientáveis.
- Discussão sobre variedades de dimensão 3, análogas a superfícies fechadas mas de dimensão 3, observação que não existe uma classificação das 3-variedades. A conjectura de Poincaré, como um primeiro passo nesta classificação. Observação que é impossível classificar variedades de dimensão 4 ou superior.
- Exemplo final do grupo fundamental de SO(3).

Emaranhados racionais (Nuno Freitas)

- O que são: configurações que podem ser obtidas de duas cordas paralelas com as pontas presas na superfície de uma esfera. Exemplos de emaranhados racionais e não-racionais.
- Axiomas: inteiros = voltas à direita; operação de rotação por 90 graus transforma F em -1/F. exmplos básicos 1,3, -1/3; multiplicação lado a lado corresponde a somar as fracções associadas. Assim conseguimos obter um valor também para somas verticais.
- o numero 0 e o número (mais ou menos) infiníto. Observação que infinito mais um é infinito.
- Com 4 voluntários a segurar as cordas e outro voluntário a registar os valores, obteve-se um valor racional e o emaranhado foi desfeito com outros movimentos, sem ser as operações inversas que levaram a esse valor.
- Breve observação aobre o que são fracções continuadas, e como estão relacionadas com as operações que conduzem aos emaranhados racionias.
- (no dia seguinte, entrega de 4 páginas do artigo de Goldman e Kauffman, com a prova topológica da fórmula de Lagrange para emaranhados racionais. Para fracções continuadas a fórmula de Lagrage relaciona duas fracções continuadas que correspondem ao mesmo número racional.

Referência:
J. R. Goldman and L. H. Kauffman, Rational Tangles, Advances in Applied Mathematics 18, 300-332 (1997).

Geometria Hiperbólica (Marco Mackaay)

- os 5 axiomas de Euclides, por exemplo 1) 2 pontos definem uma recta; 5) l uma recta, P não pertencente a l, implica que existe uma única recta por P paralela a l (paralela significa por definição que nao intersecta).
- Descartes deu um modelo que satisfaz os axiomas.
- Goedel mostrou que não há axiomas completos e consistentes.
- 5) independente de 1)-4) pode ser substituido, por exemplo por 5) ... *não* existe ... geometria esférica (uma recta é um diámetro, quaisquer dois diámetros intersectam. Observação sobre a importância da geometria esférica (GPS), e até da geometria não-euclideana (efeitos da relatividade geral também no GPS)
- 5) ... existem infinitas rectas ... conduz à geometria hiperbólica
- Historia da geometria hiperbólica: Lobachevsky (1830), Janos Bolyai (1832) Eugenio Beltrami (1868) nota: o pai de Bolyai, também matemático desistiu de ideias análogas porque teria sido despedido
- esboço do hiperboloide, e menção de uma projecção para o semiplano de Poincaré (R^2 com y>0).
- rectas são semirectas verticais ou semi-circunferências com centro no eixo dos x. Soma dos ângulos num triângulo menor que 180 graus (analogia com geometria esférica – soma maior que 180 graus
- definição da distância hiperbólica d entre (x,y) e (w,z): cosh(d) = 1+ \frac{(x-w)^2 + (y-z)^2}{2yz}
- Teorema de Pitágoras na geometria hiperbólica: cosh(a)cosh(b)=cosh(c)
- num certo limite, recupera-se o teorema de Pitágoras usual.

Nós de gravata (Roger Picken)

- História dos nós de gravata conhecidos e a procura sistemática de novos nós por parte de Fink e Mao.
- Notação diagramática (C, L, R, e indicação da seta da direcção). Observação que as possibilidades são limitadas devido ao comprimento finito da gravata.
- Demonstração de alguns exemplos (3.1, "four-in-hand" 4.1), mostrando ambas as maneiras de começar (lado bonito ou lado feio virado para a frente).
- Menção da fórmula com o número total de possíveis nós de gravata, pressupondo um número de movimentos inferior ou igual a 9. Representação destes nós como caminhos num reticulado hexagonal.
- Menção de alguns dos parâmetros usados para seleccionar nós de gravata esteticamente equilibrados.
- Prática com nós de gravata fazendo um dos novos nós de gravata (7.3) inventados pelo duplo de investigadores.

Sessões no computador

- Indicação de algumas possibilidades do programa Mathematica: cálculo algébrico, cálculo com nós (Edgar Costa).
- O Knot Atlas http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page com visita à página Rolfsen Table, com propriedades e invariantes de nós com até 10 cruzamentos.
- Knot Plot http://www.knotplot.com/ em particular algumas demonstrações (energia de nós, enlaces Brunnianos, etc.), tabelas de nós e enlaces, invariantes.

Bibliografia principal usada na preparação do curso:

M. A. Armstrong, Basic Topology
http://www.springer.com/math/geometry/book/978-0-387-90839-7

Louis H Kauffman, Knots and Physics, 3rd Edition
http://www.worldscibooks.com/mathematics/4256.html

Para visualizar espaços e outros mundos como a garrafa de Klein, o 3-toro etc.
Jeffey R. Weeks, The Shape of Space
http://www.amazon.com/Shape-Space-Pure-Applied-Mathematics/dp/0824707095

Artigo de Louis H Kauffman com material aobre nós, o polinómio bracket e o polinómio de Jones, e muito mais:
Louis H Kauffman, New Invariants in the Theory of Knots, American Mathematical Monthly (1987).
http://www.math.uic.edu/~kauffman/Bracket.pdf