Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Geometria Diferencial 2009-2010

Exame 2 - 5 de Fevereiro de 2010 - 13h00

Duração: 3 horas

(3 val.) 1. Mostre que a função $\Psi : S^2 \to P^3$, dada por

$$(x^1, x^2, x^3) \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\} \mapsto [x^1, x^2, x^3, 0],$$

é uma aplicação diferenciável (considerando as estruturas diferenciáveis canónicas em S^2 e P^3). Mostre ainda que Ψ é uma imersão, mas não é um mergulho.

(4 val.) 2. Dada uma distribuição D de classe C^∞ numa variedade M, define-se:

$$I(D) = \{\omega \in \Omega(M) : \omega \text{ aniquila } D\}.$$

(Recorda-se: $\omega \in \Omega^k(M)$ aniquila D, sse $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$, para todos os campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(D)$). Mostre: i) $I(D)$ é um ideal da álgebra Grassmanniana $\Omega(M)$, ii) se D é involutiva, então $I(D)$ é um ideal diferencial.

Mostre que o sistema de EDP:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = h(x, y, z) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y, z)$$

tem solução local $z = f(x, y)$ para qualquer condição inicial $f(x_0, y_0) = z_0$, sse as funções h e g, de classe C^∞, satisfazem:

$$\frac{\partial h}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} + h\frac{\partial g}{\partial z}.$$

(3 val.) 3. Seja U um espaço linear real de dimensão 3, e $\mathcal{F}_{1,2}$ o espaço cujos elementos são todos os pares (V, W), com V, W subespaços lineares de U, $\dim V = 2$, $\dim W = 1$ e $W \subset V$. Mostre que $\mathcal{F}_{1,2}$ tem uma estrutura de variedade diferenciável homogénea sob a acção de $GL(3)$, e que a dimensão de $\mathcal{F}_{1,2}$ é 3.

(4 val.) 4. Calcule a cohomologia de de Rham da variedade

$$M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : (x = z = 0) \vee (x = y = 0 \wedge z = 1)\}.$$

(3 val.) 5. Sendo ∇_1, ∇_2 conexões num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$, e $f \in C^\infty(M)$, mostre que

$$f\nabla_1 + (1 - f)\nabla_2$$

é uma conexão em ξ.

(3 val.) 6. Seja $\zeta = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal, $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ uma 1-forma de conexão em ζ, e $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ a 2-forma de curvatura correspondente. Seja

$$Q : \mathfrak{g}^k \to \mathbb{R}$$

uma função k-linear, simétrica e Ad invariante.

No caso particular de $\dim M = 3$, $k = 2$, mostre que

$$c_3(\omega, \Omega) = Q(\omega, \Omega) - \frac{1}{6}Q(\omega, [\omega, \omega])$$

representa uma classe de cohomologia em P.

Mostre que o mesmo se verifica para k geral, $\dim M = 2k - 1$, e

$$c_{2k-1}(\omega, \Omega) = k \int_0^1 Q(\omega, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)\, dt,$$

onde

$$\Omega_t = td\omega + \frac{1}{2}t^2[\omega, \omega].$$

Para $k = 3$, forneça uma expressão para $c_5(\omega, \Omega)$, análoga à de cima para $c_3(\omega, \Omega)$.