Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Exame - 11 de Julho de 2003 - 9h

Duração: 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 < x < 1\,;\ 0 < y < 1\,;\ 0 < z < x + y\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados nas formas seguintes

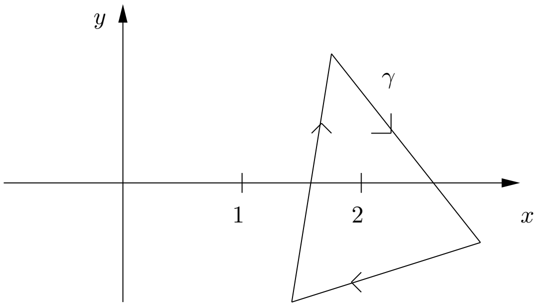
$$\iiint dzdydx \ \ ; \ \iiint dxdydz$$

(2 val.) (b) Calcule a massa do sólido V sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = x + y$.

(2 val.) **2.** Calcule o volume do sólido B descrito por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\,;\ x^2 + y^2 < 1\,;\ 0 < z < 1\,\}.$$

3. Seja γ a curva representada na figura seguinte.



Considere os campos vectoriais $F_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 = 1\} \to \mathbb{R}^2$ e $F_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definidos por

$$F_1(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 - 1} \right),$$

$$F_2(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right).$$

(1 val.) (a) Mostre que F_1 e F_2 são campos fechados no seu domínio.

(1.5 val.) (b) Mostre que F_1 é gradiente no seu domínio, mas o mesmo não sucede com F_2.

(1.5 val.) (c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma (F_1 + F_2) \cdot dg$ onde γ é o caminho triangular representado na figura.

4. Considere conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, e^{xy} + \log(z + x) = 1\}.$$

(1 val.) (a) Prove que existe uma vizinhança $U \in \mathbb{R}^3$ do ponto $(0, 1, 1)$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(1, 1)$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$L \cap U = \{(f(y, z), y, z) : \, (y, z) \in V\}.$$

(1 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1)$.

(2.5 val.) **5.** Utilizando o Teorema da Divergência e o campo $F(x, y, z) = (x, y, -z)$, calcule o volume da seguinte região de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}.$$

6. Considere a superfície

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2 \, ; \, x < 1\}$$

e o campo vectorial $H(x, y, z) = (\arctan(xyz), z, -y)$.

(2 val.) (a) Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de $\operatorname{rot} H$ através de C no sentido da normal com a primeira componente negativa.

(0.5 val.) (b) Usando o resultado da alínea a) calcule o fluxo de $\operatorname{rot} H$ através do disco

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1 \, ; \, x = 1\}$$

no sentido da normal com a primeira componente positiva.

(3 val.) **7.** Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e (a, b, c) um ponto de $\mathbb{R}^3$ tal que $F(a, b, c) = 0$. Supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$, recorra ao Teorema da Função Inversa para demonstrar que a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como função de x e y em alguma vizinhança de (a, b, c).