Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

LEC, LET, LEEC, LEGI, LEM, LEIC

EXAME 1 / TESTE 2 – 15 DE JANEIRO DE 2003 – 17H

apresente e justifique todos os cálculos

Duração do Exame: 3h00 Duração do Teste: 1h30

Teste 2: Responda apenas às perguntas 4,5 e 6 (verso da folha)

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, 2z^2 < x^2 + y^2 < z^2 + 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx\right) dy\right) dz$.

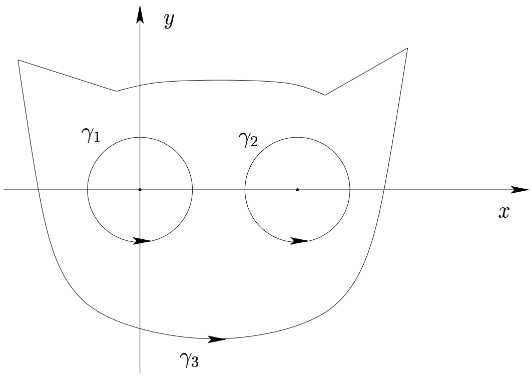
(2 val.) (b) Calcule a massa do sólido V sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x,y,z) = z$.

(2 val.) (2) Calcule o integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx,$$

utilizando uma mudança de coordenadas apropriada.

(3) Sejam γ_1 e γ_2 duas circunferências de raio 1 centradas em $(0,0)$ e $(3,0)$, e γ_3 uma curva simples fechada como na seguinte figura:



Seja ainda $F(x,y) = \left(-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$ um campo vectorial em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Calcule os integrais de caminho:

(1,5 val.) (a) $\oint_{\gamma_1} F \cdot dg_1$;

(1,5 val.) (b) $\oint_{\gamma_2} F \cdot dg_2$;

(1 val.) (c) $\oint_{\gamma_3} F \cdot dg_3$.

(VSFF)

INÍCIO DO 2º TESTE

(4) Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + xy\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que S é uma superfície (variedade de dimensão 2);

(2 val.) (b) Determine a distância de S à origem.

(5) Considere a variedade

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ \ y > 0,\ \ z > 0\},$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (2x, -y, 1-z).$$

Calcule o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ segundo a direcção da normal unitária ν cuja terceira componente é positiva, usando:

(1,5 val.) (a) a definição de fluxo;

(2 val.) (b) o Teorema da Divergência;

(2 val.) (c) o Teorema de Stokes.

(1,5 val.) (6) Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ \frac{|y|\, x^2}{(x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$ e calcule o seu integral.