Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

EXAME 2 – 29 DE JANEIRO DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 3 horas (17h-20h)   cotação: 2 valores por alínea

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\; 0 \le y \le 1 \,,\; e^x \le z \le e\} \,.$$

(a) Calcule o integral $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{z}$.

(b) Escreva uma expressão para $\displaystyle\iiint_V f$ da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz \,.$$

(2) Um sólido com a forma da região

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 2 \,,\; y > 0 \,,\; z > 0\big\}$$

tem densidade de massa dada por cz onde $c > 0$ é uma constante. Calcule a constante c sabendo que a massa total desse sólido é 15π.

(3) Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(y \,,\; x - \frac{z}{y^2+z^2} \,,\; z + \frac{y}{y^2+z^2} \right)$$

definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determine se F é ou não um gradiente no seu domínio.

(b) Diga quais são todos os valores possíveis para o trabalho de F ao longo de caminhos desde o ponto $(0,1,0)$ até ao ponto $(0,-1,0)$.

(continua)

(4) Considere a superfície $A \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação $z = x^2 - y^2$, com $x^2 + y^2 < 1$.
  (a) Calcule a área de A.
  (b) Diga se é ou não possível parametrizar uma vizinhança de A contendo o ponto $(1, 1, 0)$ escrevendo y como função de x e z.

(5) Utilizando o teorema da divergência, calcule o fluxo do campo vectorial

$$G(x, y, z) = (2x, 2y, -4z + 1)$$

através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - 2(x^2 + y^2)^4 \ , \ x^2 + y^2 < 1\}$$

no sentido da normal unitária com terceira componente positiva n.

(6) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo

$$H(x, y, z) = \big(-y^3, x^3, e^{x+y} \cos(z + 1)\big)$$

ao longo da circunferência C dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$, percorrida num sentido à sua escolha.

(7) Mostre que o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt, \ z = \int_0^1 e^{-x^2 t^3} dt\right\}$$

é uma variedade e diga qual é a sua dimensão. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y, z) = \frac{7}{12} x^2 + y + z$ quando restrita a M.