Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE 2 - **VERSÃO A**

9 DE JUNHO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (19:00 - 20:30)

(1) Considere o seguinte conjunto

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 = 1 + x^2, \, 1 < x < 3 \right\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade. Qual a sua dimensão?

(3 val.) (b) Calcule a massa de M sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\alpha(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

(3 val.) (c) Determine o ponto da intersecção de M com o plano $x = 2$ que está mais próximo do ponto $(3,3,3)$.

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = \sqrt{y^2+z^2} \, ; \, 1 < x < 2 \right\},$$

com a normal n que tem a primeira componente positiva e os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = (2x-2, y, 3z + \arctan x^3 y) \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = (x^2+x, -2xy, -z).$$

(4 val.) (a) Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal n.

(4 val.) (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de G através de S no sentido da normal n.

(3) Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f \, dx\, dy\, dz$$

onde $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(x,y,z,t) = \frac{e^{-(y^2+z^2)} \cos(t+x+y+z)}{1+x^2}$$

(2 val.) (a) Mostre que h está bem definida, ou seja, o integral $\int_{\mathbb{R}^3} f$ existe para cada $t \in \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Encontre um majorante para $|h'(0)|$.