Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE 2 - **VERSÃO B**

9 DE JUNHO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (19:00 - 20:30)

(1) Considere o seguinte conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = 1 + y^2,\, 1 < y < 3\right\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que S é uma variedade. Qual a sua dimensão?

(3 val.) (b) Calcule a massa de S sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}.$$

(3 val.) (c) Determine o ponto da intersecção de S com o plano $y = 2$ que está mais próximo do ponto $(4,4,4)$.

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \sqrt{x^2+z^2}\ ;\ 1 < y < 3\right\},$$

com a normal n que tem a segunda componente positiva e os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por

$$G(x,y,z) = (x, 2y-6, z+\cos^4(x-y)) \ \text{ e } \ F(x,y,z) = (-2xy, y^2+y, -z).$$

(4 val.) (a) Calcule o fluxo de G através de M no sentido da normal n.

(4 val.) (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal n.

(3) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} h \; dx\,dy\,dz$$

onde $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$h(x,y,z,t) = \frac{e^{-(x^2+z^2)}\,\mathrm{sen}(t+x+y+z)}{1+y^2}$$

(2 val.) (a) Mostre que g está bem definida, ou seja, o integral $\int_{\mathbb{R}^3} h$ existe para cada $t \in \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Encontre um majorante para $|g'(0)|$.