Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

TESTE 1 – 12 DE ABRIL DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : x > 0 \, , \, x < y < 1 \, , \, 0 < z < (y-1)^2\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \int \int dx\, dy\, dz$.

(3 val.) (b) Calcule o volume de V usando um integral iterado da forma $\int \int \int dz\, dy\, dx$.

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x > 0 \, , \, (x+1)^2 < y^2 + z^2 < 4\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.
Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

(3) Considere os campos vectoriais F_1 e F_2 definidos por

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \left(\frac{y-2}{x^2 + (y-2)^2} \, , \, \frac{-x}{x^2 + (y-2)^2} \right) \\ F_2(x, y) &= \left(\frac{-2x}{y + 1 - x^2} \, , \, \frac{1}{y + 1 - x^2} \right) \end{aligned}$$

(2 val.) (a) Mostre que F_1 e F_2 são campos fechados nos seus domínios.

(3 val.) (b) Calcule

$$\int_{\gamma_1} (F_1 + F_2) \cdot dg$$

onde γ_1 é a circunferência centrada na origem, com raio $1/2$ e orientada positivamente.

(3 val.) (c) Calcule

$$\int_{\gamma_2} (F_1 + F_2) \cdot dg$$

onde γ_2 é a linha triangular com vértices nos pontos $(1/2, 0)$, $(0, 3)$, $(-1/2, 0)$ orientada positivamente.

(3 val.) (4) Sejam u e v campos escalares de classe C^1 num aberto $S \subset \mathbb{R}^2$ que contém o disco unitário $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Considere os campos vectoriais $f, g : S \to \mathbb{R}^2$ definidos por

$$f(x, y) = (u, v) \quad \text{e} \quad g(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Calcule o integral

$$\int \int_D f \cdot g \, dx \, dy$$

sabendo que na fronteira de D temos $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = y$.
Nota: $f \cdot g$ representa o produto interno dos campos f e g.