Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Exame/2º Teste - 25 de Junho de 2003 - 9h

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

Resolução

1. (a) O conjunto V está representado na figura 1.

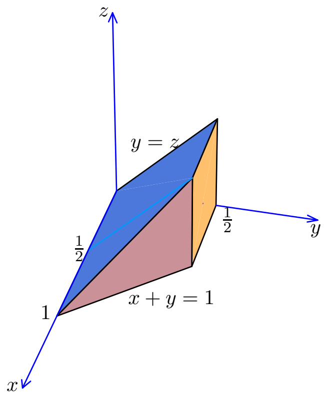


Figura 1: O conjunto V

Os cortes perpendiculares ao eixo Oz, com $0 < z < \frac{1}{2}$, encontram-se representados na figura 2.

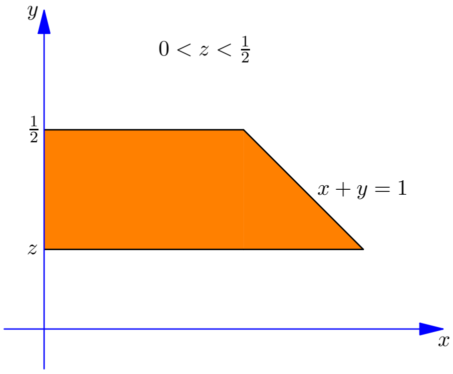
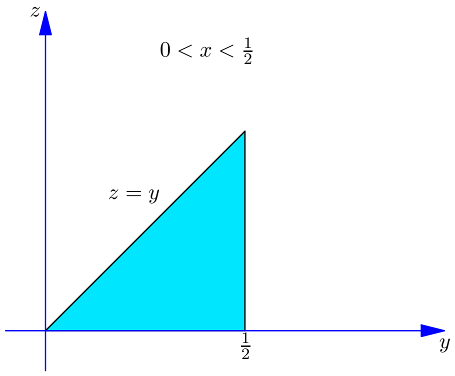


Figura 2: Cortes em V perpendiculares ao eixo Oz

Desta figura concluimos imediatamente que

$$\operatorname{vol}(V) = \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} \int_0^{1-y} dxdydz$$



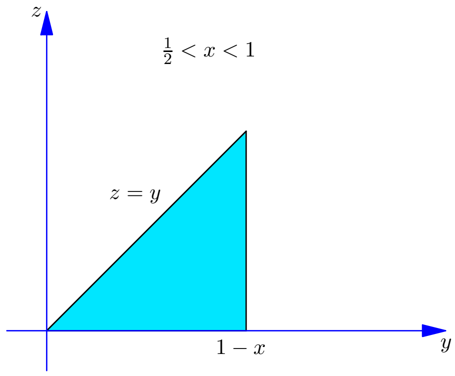


Figura 3: Cortes em V perpendiculares ao eixo Ox

Os cortes perpendiculares ao eixo Ox são de dois tipos: um para $0 < x < \frac{1}{2}$ e outro para $\frac{1}{2} < x < 1$, como se representa na figura 3.
Portanto, temos

$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \int_0^y dzdydx + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} \int_0^y dzdydx$$

(b) Usando o integral iterado da forma $\int\int\int (\ldots) dxdydz$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{1}{1-y} &= \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} \int_0^{1-y} \frac{1}{1-y}\, dxdydz \\
&= \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} \frac{1}{1-y}(1-y)\, dydz \\
&= \int_0^{1/2} \int_z^{1/2} dydz \\
&= \int_0^{1/2} (\frac{1}{2} - z) dz = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

2. Podemos usar coordenadas cilíndricas para descrever a região S. Sendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, o conjunto S resulta de uma revolução em torno do eixo Oz da figura representada na figura 4.

$$x = \rho \cos\theta \; ; \; y = \rho \,\mathrm{sen}\, \theta \; ; \; z = z$$
$$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; 0 < \theta < 2\pi \; ; \; z < \rho < \sqrt{1 - z^2}$$

Dado que a densidade de massa é igual a um, o momento de inércia relativo ao eixo Oz do sólido S é dado pelo integral

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2)$$

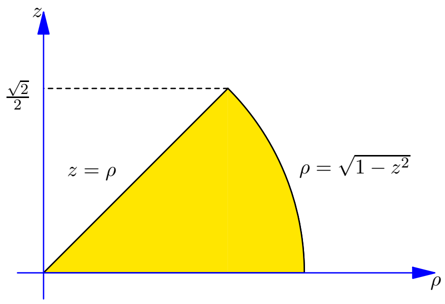


Figura 4:

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_z = \int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^{2\pi}\int_z^{\sqrt{1-z^2}} \rho^2\rho\, d\rho d\theta dz &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2}((1-z^2)^2-z^4)dz \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2}(1-2z^2)dz \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{6}
\end{aligned}
$$

3. (a) O trabalho do campo F ao longo do caminho γ é o integral de linha de F em γ, ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{3(\cos t)^{2/3}\operatorname{sen} t}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}, -\frac{3\cos t(\operatorname{sen} t)^{2/3}}{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}(\cos t)^{-2/3}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t)^{-2/3}\cos t\right)dt \\
&= \int_0^{\pi/2}(-\operatorname{sen}^2 t-\cos^2 t)dt = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Note-se que a derivada de γ não está definida nos pontos $t=0$; $t=\frac{\pi}{2}$, mas o integral existe.

(b) Para mostrar que o campo $F=(F_1,F_2)$ é fechado devemos verificar a igualdade

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

De facto temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{-9x^2y^2(x^6+y^6)+18x^8y^2}{(x^6+y^6)^2} = \frac{9x^8y^2-9x^2y^8}{(x^6+y^6)^2} \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{9x^2y^2(x^6+y^6)-18x^2y^8}{(x^6+y^6)^2} = \frac{9x^8y^2-9x^2y^8}{(x^6+y^6)^2}
\end{aligned}
$$

(c) O segmento de recta R que une os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ e a curva C parametrizada por γ, são homotópicas no domínio do campo F, como pode ser visto na figura 5. Note-se que $\gamma(0) = (1,0)$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$. Da alínea anterior sabemos que F é fechado no seu domínio e, portanto, podemos concluir que o trabalho realizado pelo campo F ao longo do segmento R é dado por

$$\int_R F \cdot dg = \int_C f \cdot d\gamma = -\frac{\pi}{2}$$

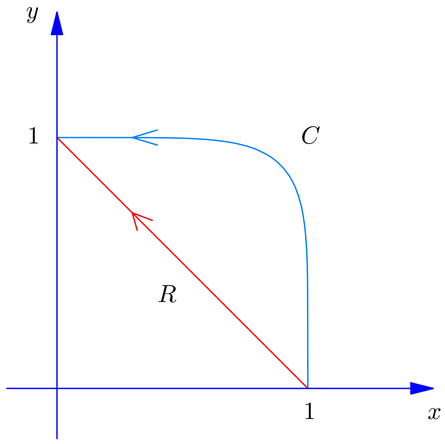


Figura 5:

(d) Se o trabalho realizado por F ao longo de um caminho fechado, em torno da origem, for diferente de zero concluiremos que F não é um gradiente. Assim, consideremos a curva Γ descrita pelo caminho fechado

$$\gamma(t) = \Big((\cos t)^{1/3}\,,\ (\operatorname{sen} t)^{1/3}\Big)\ ;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

e representada na figura 6. Note-se que γ não é diferenciável nos pontos

$$t = 0\,,\ t = \frac{\pi}{2}\,,\ t = \pi\,,\ t = \frac{3\pi}{2}\,,\ t = 2\pi$$

No entanto, trata-se de um caminho seccionalmente de classe C^1 e, tal como na alínea (a), temos

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -1$$

e, portanto,

$$\int_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = -2\pi$$

Portanto o campo F não é um gradiente.

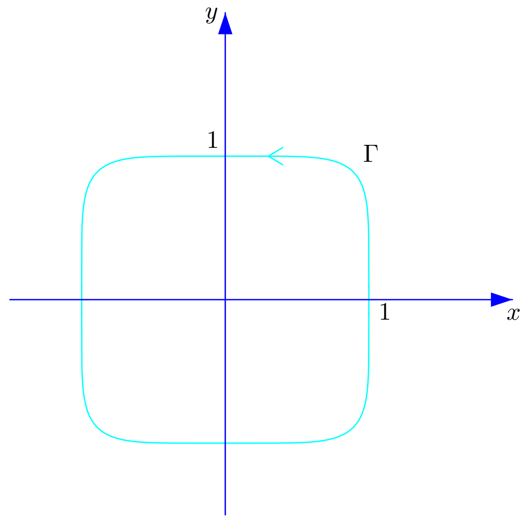


Figura 6:

4. (a) Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 4\,,\; x + y + z - 2\sqrt{2})$$

Trata-se de uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0)\}$$

A respectiva derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois e, portanto, podemos concluir que L é uma variedade de dimensão igual a um.

(b) O espaço normal a L no ponto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ é gerado pelas linhas da matriz

$$DF(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, é dado por

$$\begin{aligned} (T_P L)^\perp &= \{\alpha(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0) + \beta(1, 1, 1)\,;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\sqrt{2}\alpha + \beta, 2\sqrt{2}\alpha + \beta, \beta)\,;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Portanto, o espaço normal a L no ponto P é o plano definido pela equação $x = y$.
Seja $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vector do espaço tangente a L no ponto P. Então temos

$$\begin{cases} (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0) \cdot v = 0 \\ (1, 1, 1) \cdot v = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}v_1 + 2\sqrt{2}v_2, 0 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que devemos ter

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Assim, uma base para o espaço tangente $T_P L$ é constituída pelo vector $(1, -1, 0)$. Portanto, o espaço tangente é a recta definida pelas equações $x = -y$; $z = 0$.

5. (a) Vamos usar o teorema da divergência aplicado ao domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2\, ;\, -1 < z < 1\}$$

A fronteira ∂D de D é constituída pelas três superfícies S, T_1, T_2 em que

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\, ;\, z = -1\} \\ T_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\, ;\, z = 1\} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_D \mathrm{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_S F \cdot \nu_S + \int_{T_1} F \cdot \nu_1 + \int_{T_2} F \cdot \nu_2$$

em que ν é a normal exterior a D.
Note-se que a normal que satisfaz $\nu(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 1, 0)$ é a normal exterior a D.
Dado que $\mathrm{div} F = 1 + 1 - 1 = 1$, o fluxo pretendido é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_D \mathrm{div} F - \int_{T_1} F \cdot \nu_1 - \int_{T_2} F \cdot \nu_2 \\ &= \mathrm{vol}(D) - \int_{T_1} F \cdot \nu_1 - \int_{T_2} F \cdot \nu_2 \end{aligned}$$

O volume de D pode ser calculado usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} &x = \rho \cos\theta\, ;\, y = \rho \sin\theta\, ;\, z = z \\ &0 < \theta < 2\pi\, ;\, -1 < z < 1\, ;\, 0 < \rho < \sqrt{2 - z^2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(D) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{2 - z^2}} \rho\, d\rho dz d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} (2 - z^2) dz d\theta \\ &= \frac{10\pi}{3} \end{aligned}$$

Sendo T_1 um plano horizontal, a normal ν_1 é o vector $(0, 0, -1)$. Assim, temos $F \cdot \nu_1 = -2$ e,

$$\int_{T_1} F \cdot \nu_1 = -2\, \text{área}(T_1) = -2\pi$$

Do mesmo modo temos $\nu_2 = (0,0,1)$ e $F \cdot \nu_2 = 0$, ou seja

$$\int_{T_2} F \cdot \nu_2 = 0$$

Finalmente obtemos

$$\int_S F \cdot \nu = \frac{10\pi}{3} + 2\pi = \frac{16\pi}{3}$$

(b) Começamos por observar que $\mathrm{div} G = 0$ e que o domínio de G é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela. Logo, existe um campo vectorial A tal que $\mathrm{rot} A = G$. Para determinar o campo A devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 2z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

Escolhendo $A_3 = 0$, das duas primeiras equações deduzimos,

$$\begin{aligned} A_2 &= -yz + C_2(x,y) \\ A_1 &= z^2 + C_1(x,y) \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação, obtemos

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial y} = 1$$

Escolhendo $C_1 = 0$, teremos $C_2 = x$ e, portanto,

$$A(x,y,z) = (z^2, x - yz, 0)$$

Podemos aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de G através de S da seguinte forma

$$\int_S G \cdot \nu = \int_S \mathrm{rot} A \cdot \nu = \int_{C_1} A \cdot d\gamma_1 + \int_{C_2} A \cdot d\gamma_2$$

onde

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1 \; ; \; z = -1\} \\ C_2 &= \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1 \; ; \; z = 1\} \end{aligned}$$

O sentido compatível com a normal ν deve ser o sentido horário para C_2 e o sentido anti-horário para C_1, ou seja, as respectivas parametrizações devem ser as seguintes

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, -1) \; , \; 0 \le t \le 2\pi \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1) \; , \; 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

e, portanto, os integrais de linha serão dados por

$$\begin{aligned}\int_{C_1} A\cdot d\gamma_1 &= \int_0^{2\pi} A(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi}(1,\cos t+\operatorname{sen} t,0)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t,0)dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t+\cos^2 t+\cos t\operatorname{sen} t)dt\\ &= (\cos t+\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2})\Big|_0^{2\pi}\\ &= \pi\end{aligned}$$

e por

$$\begin{aligned}\int_{C_2} A\cdot d\gamma_2 &= \int_0^{2\pi} A(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi}(1,\cos t+\operatorname{sen} t,0)\cdot(-\operatorname{sen} t,-\cos t,0)dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t-\cos^2 t-\cos t\operatorname{sen} t)dt\\ &= (\cos t-\frac{t}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}-\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2})\Big|_0^{2\pi}\\ &= -\pi\end{aligned}$$

Adicionando os dois integrais, temos

$$\int_S G\cdot\nu=\pi-\pi=0$$

6. Notemos que

$$|f(x,y)|=(x^2+y^2)\,|1-\cos(x+y)|\,e^{-(x^2+y^2)^2}\le 2(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}$$

Portanto, se a função $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y)=2(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}$$

for integrável em $\mathbb{R}^2$, então a função f também o será. Para provar que h é integrável em $\mathbb{R}^2$, usamos o teorema da convergência monótona. Para isso, consideremos a sucessão de funções $\{h_k\}$ definidas por

$$h_k(x,y)=\begin{cases} h(x,y)\,, & \text{se } x^2+y^2\le k^2\\ 0\,, & \text{se } x^2+y^2>k^2\end{cases}$$

(i) Cada uma das funções h_k é integrável em $\mathbb{R}^2$, pois é contínua no compacto

$$B_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq k^2\}$$

e nula em $\mathbb{R}^2 \setminus B_k$.

(ii) A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque h é positiva.

(iii) A sucessão de integrais $\{\int_{\mathbb{R}^2} h_k\}$ é majorada. De facto, usando coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} h_k = \int_{B_k} h &= \int_0^{2\pi} \int_0^k 2r^2 e^{-r^4} r \, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^k 2r^3 e^{-r^4} \, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \frac{-e^{-r^4}}{2} \right|_0^k d\theta \\
&= \pi(1 - e^{-k^4}) \leq \pi
\end{aligned}$$

(iv) Por construção, é claro que $h_k \to h$.

Pelo teorema da convergência monótona podemos concluir que h é integrável em $\mathbb{R}^2$ e que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_k = \pi$$

Portanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f| \leq \int_{\mathbb{R}^2} h = \pi$$