

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE 2 - VERSÃO A

9 DE JUNHO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (19:00 - 20:30)

(1) Considere o seguinte conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1 + x^2, 1 < x < 3\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade. Qual a sua dimensão?

(3 val.) (b) Calcule a massa de M sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\alpha(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}}.$$

(3 val.) (c) Determine o ponto da intersecção de M com o plano $x = 2$ que está mais próximo do ponto $(3, 3, 3)$.

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{y^2 + z^2}; 1 < x < 2\},$$

com a normal n que tem a primeira componente positiva e os campos vectoriais definidos em \mathbb{R}^3 por

$$F(x, y, z) = (2x - 2, y, 3z + \arctan x^3 y) \text{ e } G(x, y, z) = (x^2 + x, -2xy, -z).$$

(4 val.) (a) Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal n .

(4 val.) (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de G através de S no sentido da normal n .

(3) Considere a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f \, dx \, dy \, dz$$

onde $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(x, y, z, t) = \frac{e^{-(y^2+z^2)} \cos(t + x + y + z)}{1 + x^2}$$

(2 val.) (a) Mostre que h está bem definida, ou seja, o integral $\int_{\mathbb{R}^3} f$ existe para cada $t \in \mathbb{R}$.

(2 val.) (b) Encontre um majorante para $|h'(0)|$.

RESOLUÇÃO:

1.(a) Consideramos a a função $\phi : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x < 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 - x^2.$$

Esta função é de classe C^1 , o conjunto M é o conjunto de nível zero de ϕ e a sua derivada é dada por

$$D\phi = [-2x \quad 2y \quad 2z].$$

Esta matriz tem característica igual a 1 em todos os pontos de M , logo podemos concluir que M é uma variedade de dimensão 2.

1.(b) Uma parametrização para M é dada por $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde g é definida por

$$g(x, \theta) = (x, \sqrt{1+x^2} \cos \theta, \sqrt{1+x^2} \sin \theta)$$

e $T =]1, 3[\times]0, 2\pi[$. Assim obtemos

$$Dg(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos \theta & -\sqrt{1+x^2} \sin \theta \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin \theta & \sqrt{1+x^2} \cos \theta \end{bmatrix},$$

e portanto $\det Dg^t(x, \theta) Dg(x, \theta) = 1 + 2x^2$.

Assim a massa de M é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_M \alpha = \iint_T \alpha(g(x, \theta)) \sqrt{\det Dg^t Dg} dx d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} \sqrt{1+2x^2} dx d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

1.(c) A intersecção de M com o plano $x = 2$ é uma circunferência C definida pelas equações $F(x, y, z) = (y^2 + z^2 - x^2 - 1, x - 2) = (0, 0)$. Como C é uma variedade (de dimensão 1) podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Assim consideramos a função

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2$$

que representa o quadrado da distância do ponto (x, y, z) ao ponto $(3, 3, 3)$ e a função g definida por

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1(y^2 + z^2 - 1 - x^2) + \lambda_2(x - 2).$$

A solução do problema é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla g = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

Portanto temos

$$\begin{cases} 2(x - 3) - 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2(y - 3) + 2\lambda_1 y = 0 \\ 2(z - 3) + 2\lambda_1 z = 0 \\ y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Da segunda e terceira equações concluímos que $y = z$. Substituindo na quarta equação e usando $x = 2$, facilmente concluímos que $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Logo obtemos os pontos

$$\left(2, \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(2, -\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Como C é uma variedade compacta e $f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2$ é uma função contínua podemos concluir, pelo Teorema de Weierstrass, que f tem máximo e mínimo em C . Calculando $f\left(2, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 24 \mp 6\sqrt{10}$ concluímos que a solução do problema é o ponto $\left(2, \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

2.(a) Vamos utilizar o teorema da divergência. Seja V o volume limitado por S e pelas tampas

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y^2 + z^2 < 4\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y^2 + z^2 < 1\}.$$

A normal exterior a V em D_1 é dada por $\nu_1 = (1, 0, 0)$, em D_2 por $(-1, 0, 0)$ e em S coincide com $-n$. Logo,

$$\int_V \operatorname{div} F = - \int_S F \cdot n + \int_{D_1} F \cdot \nu_1 + \int_{D_2} F \cdot \nu_2.$$

Temos $\operatorname{div} F = 6$ e

$$\int_V \operatorname{div} F = 6 \operatorname{Vol}(V) = 6 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^x \rho d\rho dx d\theta = 14\pi.$$

Temos $F \cdot \nu_1 = 2x - 2 = 2$ em D_1 , pelo que $\int_{D_1} F \cdot \nu_1 = 8\pi$. Temos $F \cdot \nu_2 = -2x + 2 = 0$ em D_2 , pelo que $\int_{D_2} F \cdot \nu_2 = 0$. Logo, pela equação acima, o fluxo é dado por

$$\int_S F \cdot n = -14\pi + 8\pi + 0 = -6\pi.$$

2.(b) Temos $\operatorname{div} G = 0$. Como o domínio de G é \mathbb{R}^3 , que é um conjunto em estrela, existe um potencial vector H , tal que $\operatorname{rot} H = G$. Podemos tomar $H_x = 0$ e obtemos,

$$\begin{cases} \partial_2 H_3 - \partial_3 H_2 = G_1 = x^2 + x \\ -\partial_1 H_3 = G_2 = -2xy \\ \partial_1 H_2 = G_3 = -z \end{cases}$$

Obtemos $H_2 = -xz + \alpha(y, z)$, $H_3 = x^2 y + \beta(y, z)$ e $x^2 + \partial_2 \alpha + x - \partial_3 \beta = x^2 + x$, pelo que tomamos $\alpha = \beta = 0$ e $H = (0, -xz, x^2 y)$.

O bordo de S é constituído pelas circunferências

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y^2 + z^2 = 4\} \quad \text{e}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y^2 + z^2 = 1\}.$$

A orientação do bordo de s consistente com a normal n é dada percorrendo A no sentido anti-horário e B no sentido horário, do ponto de vista de um observador

colocado no ponto $(10, 0, 0)$. Temos então, com estas orientações e pelo teorema de Stokes,

$$\int_S G \cdot n = \oint_A H + \oint_B H.$$

Parametrizamos A com $g(\theta) = (2, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, $\theta \in]0, 2\pi[$ e B com $l(\theta) = (1, \cos \theta, -\sin \theta)$, $\theta \in]0, 2\pi[$. Então,

$$\begin{aligned} \int_S G \cdot n &= \oint_A H + \oint_B H = \\ &= \int_0^{2\pi} (0, -4 \sin \theta, 8 \cos \theta) \cdot (0, -2 \sin \theta, 2 \cos \theta) d\theta + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, \sin \theta, \cos \theta) \cdot (0, -\sin \theta, -\cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (7 + 8 \cos^2 \theta) d\theta = 22\pi. \end{aligned}$$

3.(a) Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos

$$|f(x, y, z, t)| = \left| \frac{e^{-(y^2+z^2)} \cos(t+x+y+z)}{1+x^2} \right| \leq \frac{e^{-(y^2+z^2)}}{1+x^2} = g(x, y, z).$$

Se a função g for integrável em \mathbb{R}^3 , então o integral $\int_{\mathbb{R}^3} f$ estará bem definido para cada $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sucessão de funções definidas por

$$g_k(x, y, z) = \begin{cases} g(x, y, z), & \text{se } -k \leq x \leq k; y^2 + z^2 \leq k^2 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, cada função g_k coincide com g no cilindro com eixo de simetria Ox , de raio k e de altura $2k$.

Dado que $g > 0$, a sucessão $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente e, por construção, $g_k \rightarrow g$ quando $k \rightarrow \infty$.

Para além disso, usando as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, x) tais que

$$\rho^2 = y^2 + z^2; y = \rho \cos \theta; z = \rho \sin \theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} g_k &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-k}^k \left(\int_0^k \rho \frac{e^{-\rho^2}}{1+x^2} d\rho \right) dx \right) d\theta \\ &= \pi \left(\int_{-k}^k \frac{1}{1+x^2} dx \right) \left(\int_0^k 2\rho e^{-\rho^2} d\rho \right) \\ &= \pi [\arctan k - \arctan(-k)] [1 - e^{-k^2}], \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} g_k = \pi^2.$$

Estão, assim, verificadas as condições do teorema da convergência monótona e, portanto, a função g é integrável e $\int_{\mathbb{R}^3} g = \pi^2$. Portanto, a função h está bem definida.

3.(b) Note-se que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) \right| = \left| -\frac{e^{-(y^2+z^2)} \operatorname{sen}(t+x+y+z)}{1+x^2} \right| \leq \frac{e^{-(y^2+z^2)}}{1+x^2} = g(x, y, z).$$

Assim, tendo em conta a alínea anterior, estamos em condições de usar a regra de Leibniz, ou seja,

$$h'(t) = \int \int \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz$$

e, portanto,

$$|h'(0)| \leq \int \int \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, 0) \right| dx dy dz \leq \int \int \int_{\mathbb{R}^3} g(x, y, z) dx dy dz = \pi^2.$$