Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS

TESTE 1 – 12 DE ABRIL DE 2003

Resolução

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : x > 0 \, , \, x < y < 1 \, , \, 0 < z < (y-1)^2\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int\int\int dx\,dy\,dz$.

(3 val.) (b) Calcule o volume de V usando um integral iterado da forma $\int\int\int dz\,dy\,dx$.

RESOLUÇÃO:

(a) A região V é constituída pelos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x,y) no triângulo de vértices em $(0,0),(0,1)$ e $(1,1)$ e com coordenada z entre o plano $z=0$ e a superfície $z=(y-1)^2$. Assim obtemos o seguinte esboço:

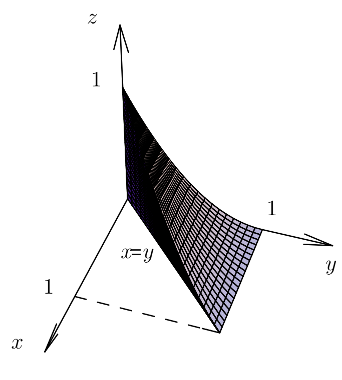

FIGURA 1. Esboço da região V

Para escrever uma expressão para o volume de V, usando um integral iterado pela ordem pedida, devemos fixar $z \in [0,1]$ e obtemos o seguinte corte:

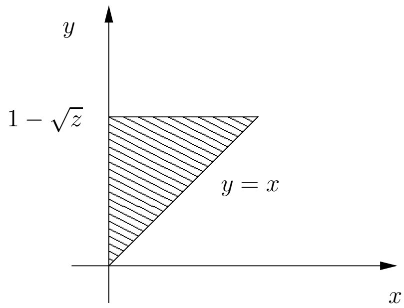

FIGURA 2. Corte em V perpendicular a $0z$

Donde

$$vol(V) = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{z}} \int_0^y dx\, dy\, dz.$$

(b) Neste caso devemos fixar $x \in [0,1]$, ou seja, fazer cortes por planos perpendiculares ao eixo $0x$:

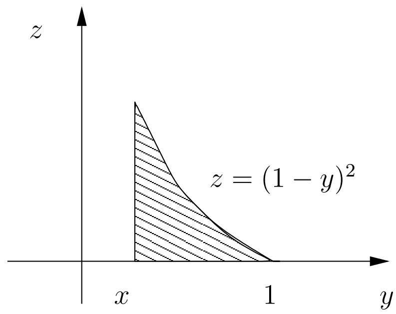

FIGURA 3. Corte em V perpendicular a $0x$

Assim o volume é dado por

$$\begin{aligned}
vol(V) &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{(y-1)^2} dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 (y-1)^2\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{(y-1)^3}{3}\right]_x^1 dx \\
&= \int_0^1 -\frac{(x-1)^3}{3}\, dx \\
&= -\left[\frac{(x-1)^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x > 0 \, , \, (x+1)^2 < y^2 + z^2 < 4\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.
Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

RESOLUÇÃO:
Observe que este sólido possui simetria rotacional em relação ao eixo $0x$. De facto, B é a região entre a superfície de revolução (cone) $y^2 + z^2 = (x+1)^2$ e o cilindro $y^2 + z^2 = 4$ com $x > 0$:

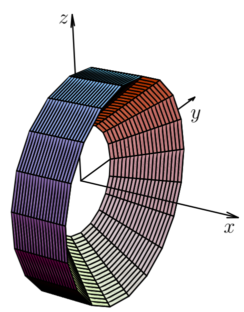

FIGURA 4. Esboço da região B

Assim, vamos utilizar uma transformação de coordenadas cílindricas em relação ao eixo $0x$:

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

O determinante da matriz Jacobiana desta transformação é então

$$| \det(Dg(\rho, \theta, x)| = \rho$$

e nestas coordenadas a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \{(\rho, \theta, x) : x + 1 < \rho < 2, \, 0 < \theta < 2\pi, \, 0 < x < 1\}.$$

Assim, a massa total do sólido B é dada por

$$
\begin{aligned}
M &= \int\int\int_B \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int\int\int_{g^{-1}(B)} \frac{x}{\rho}\rho\,d\rho\,dx\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{x+1}^2 x\,d\rho\,dx\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [x\rho]_{x+1}^2\,dx\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 x-x^2\,dx\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

(3) Considere os campos vectoriais F_1 e F_2 definidos por

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y) &= \left(\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2}\,,\,\frac{-x}{x^2+(y-2)^2}\right) \\
F_2(x,y) &= \left(\frac{-2x}{y+1-x^2}\,,\,\frac{1}{y+1-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

(2 val.) (a) Mostre que F_1 e F_2 são campos fechados nos seus domínios.

(3 val.) (b) Calcule

$$\int_{\gamma_1}(F_1+F_2)\cdot dg$$

onde γ_1 é a circunferência centrada na origem, com raio $1/2$ e orientada positivamente.

(3 val.) (c) Calcule

$$\int_{\gamma_2}(F_1+F_2)\cdot dg$$

onde γ_2 é a linha triangular com vértices nos pontos $(1/2,0)\,,\,(0,3)\,,\,(-1/2,0)$ orientada positivamente.

RESOLUÇÃO:

(a)F_1 e F_2 são campos de classe C^1 nos seus domínios. Temos

$$\frac{\partial F_{1x}}{\partial y} = \frac{x^2-(y-2)^2}{(x^2+(y-2)^2)^2} = \frac{\partial F_{1y}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_{2x}}{\partial y} = \frac{2x}{(y+1-x^2)^2} = \frac{\partial F_{2y}}{\partial x}$$

logo os campos F_1 e F_2 são fechados.

(b) O domínio de F_1 é $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$ e o domínio de F_2 é $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2 - 1\}$. A circunferência γ_1 é homotópica a um ponto nos domínios de F_1 e F_2. Como estes campos são fechados, pela invariância de integrais de linha de campos fechados ao longo de caminhos fechados homotópicos, podemos concluir que

$$\int_{\gamma_1} F_1 \cdot dg = \int_{\gamma_1} F_2 \cdot dg = 0.$$

Alternativamente, a curva γ_1 está contida no disco D de raio 1 centrado na origem. Como D está contido no domínio de F_1 e é um conjunto em estrela, podemos concluir que F_1 é gradiente em D, pois é fechado, e portanto

$$\int_{\gamma_1} F_1 \cdot dg = 0.$$

Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1\} \subset D_2$. S é um conjunto em estrela, logo F_2 é gradiente em S, porque é fechado. Como $\gamma_1 \subset S$ concluimos novamente que

$$\int_{\gamma_1} F_2 \cdot dg = 0.$$

Assim obtemos

$$\int_{\gamma_1} (F_1 + F_2) \cdot dg = \int_{\gamma_1} F_1 \cdot dg + \int_{\gamma_1} F_2 \cdot dg = 0.$$

(c) Temos de novo γ_2 homotópica a um ponto no domínio de F_2, logo

$$\int_{\gamma_2} F_2 \cdot dg = 0.$$

Também poderíamos notar que γ_2 é uma curva fechada contida em S e F_2 é gradiente neste conjunto.

Por outro lado γ_2 é homotópica à circunferência C centrada em $(0,2)$ de raio 1, e é fácil de calcular o integral de F_1 ao longo desta circunferência. Uma parametrização para C é dada por

$$g(t) = (\cos t, 2 + \operatorname{sen} t), \text{ com } 0 < t < 2\pi.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_C F_1 \cdot dg &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, -\cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Donde podemos concluir que

$$\int_{\gamma_2} F_1 \cdot dg = \int_C F_1 \cdot dg = -2\pi.$$

Neste caso, podíamos, em alternativa, invocar o Teorema de Green aplicado à região delimitada entre a curva γ_2 e uma circunferência C_2 centrada em $(2,0)$ com raio 4 (por exemplo) e percorrida no sentido positivo. Uma vez que esta região é a união de regiões elementares e F_1 é fechado podemos concluir, usando o Teorema de Green que

$$\int_{\gamma_2} F_1 \cdot dg = \int_{C_2} F_1 \cdot dg.$$

Um cálculo análogo ao feito atrás para a circunferência C dá-nos

$$\int_{C_2} F_1 \cdot dg = -2\pi.$$

Finalmente obtemos

$$\int_{\gamma_2} (F_1 + F_2) \cdot dg = -2\pi.$$

(3 val.) (4) Sejam u e v campos escalares de classe C^1 num aberto $S \subset \mathbb{R}^2$ que contém o disco unitário $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Considere os campos vectoriais $f, g : S \to \mathbb{R}^2$ definidos por

$$f(x, y) = (u, v) \quad \text{e} \quad g(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Calcule o integral

$$\int\int_D f \cdot g \, dx \, dy$$

sabendo que na fronteira de D temos $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = y$.
Nota: $f \cdot g$ representa o produto interno dos campos f e g.

RESOLUÇÃO:
(a) Começamos por calcular o produto interno $f \cdot g$:

$$f \cdot g = u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Note-se que podemos escrever

$$f \cdot g = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

onde $Q = P = \frac{u^2+v^2}{2}$. Consideremos o campo $F : D \to \mathbb{R}^2$ dado por $F = (P, Q)$. Este campo é de classe C^1, pois u, v são de classe C^1. Como D é uma região elementar podemos aplicar o Teorema de Green e obtemos

$$\int\int_D f \cdot g \, dx \, dy = \oint_\Gamma P \, dx + Q \, dy$$

onde Γ é a circunferência de raio 1 centrada na origem ($\Gamma = \partial D$), percorrida no sentido directo. Para calcular este integral precisamos de uma parametrização de Γ:

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \text{ com } 0 < t < 2\pi.$$

Na circunferência temos $P(x,y) = Q(x,y) = \frac{u^2(x,y)v^2(x,y)}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$, pois, por hipótese, $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = y$ na fronteira de D. Logo

$$\begin{aligned}
\int\int_D f \cdot g \, dx \, dy &= \oint_\Gamma P \, dx + Q \, dy \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen} t + \cos t \, dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\cos t + \operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$