Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

PARA OS CURSOS LEAN, LEC, LEGMIN, LEIC, LEM, LEMAT, LET

TESTE 2
20 DE DEZEMBRO DE 2003

(1) Considere o seguinte conjunto

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2 - x^2 - y^2 \ ; \ z - y = 0\right\}.$$

(a) Mostre que C é uma variedade. Qual a sua dimensão?
(b) Determine, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto (ou os pontos) de C que está a maior distância da origem. Diga, justificando, se esse ponto tem de existir.

Resolução de (1):

(a) O conjunto C está dado como conjunto de nível zero da seguinte função de classe C^1 (de facto C^∞)

$$\begin{array}{rcl} F \ : \ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ F(x,y,z) & = & \big(x^2+y^2+z-2 \ , \ z-y\big)\,. \end{array}$$

A (matriz) derivada de F

$$DF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tem característica $k = 2$, excepto nos pontos de $\mathbb{R}^3$ da recta definida por $x = 0$ e $y = -1/2$. Esta recta não intersecta C (de facto substituindo $x = 0$ e $y = -1/2$ nas duas equações que definem C obtemos um sistema impossível para z) pelo que C é uma variedade de dimensão $m = 3 - k = 1$.

(b) O conjunto C é fechado porque é o conjunto de nível de uma função contínua. Por outro lado as coordenadas x e y dos pontos da curva satisfazem a equação

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

pelo que satisfazem também as seguintes desigualdades óbvias,

$$|x| \leq \frac{3}{2} \ ; \ |z| = |y| \leq 2,$$

que mostram que C é limitado. Assim, a variedade C é compacta pelo que qualquer função contínua tem em C (pelo menos) um mínimo e um máximo (diferentes caso a função não seja constante). Interessa-nos a restrição a C da função contínua f, correspondente ao quadrado da distância à origem, $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ (esta função tem os mesmos extremos condicionados que a função distância e é significativamente mais simples).
Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, consideramos a função escalar g em $\mathbb{R}^5$ dada por

$$g(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 + z - 2\right) + \mu\,(z - y)\,.$$

As equações para os pontos de estacionaridade (condições necessárias de extremos) desta função são

$$\begin{cases} x^2+y^2+z-2 &= & 0 \\ z &= & y \\ 2x+2x\lambda &= & 0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)=0 \\ 2y+2y\lambda-\mu &= & 0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)-\mu=0 \\ 2z+\lambda+\mu &= & 0. \end{cases}$$

Temos que $x=0$ ou $\lambda=-1$.
Se $x=0$ obtemos, das equações que definem C, o sistema

$$\begin{cases} z+y^2-2 &= & 0 \\ z &= & y \end{cases}$$

e portanto

$$y^2+y-2=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ ou } y=-2$$

ou seja obtemos os dois pontos de C, $P_1=(0,1,1)$ e $P_2=(0,-2,-2)$.

Se $\lambda=-1$ então $\mu=0,\ z=y=1/2$ e $x=\pm\sqrt{5}/2$. Obtemos os dois pontos $P_3=(\sqrt{5}/2,1/2,1/2)$ e $P_4=(-\sqrt{5}/2,1/2,1/2)$.

Os valores de f nos quatro pontos são $f(P_1)=2$, $f(P_2)=8$ e $f(P_3)=f(P_4)=7/4$ pelo que o ponto de C a maior distância da origem é $P_2=(0,-2,-2)$. A distância deste ponto à origem é $d=\sqrt{f(P_2)}=2\sqrt{2}$.

(2) Considere a variedade de dimensão 2

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=9\ ;\ 0<y<2\right\}$$

e o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z)=(yx,-y^2,zy).$$

Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal que no ponto $(2,1,2)$ tem a terceira componente negativa, usando:

(a) a definição de fluxo;

(b) o teorema da divergência;

(c) o teorema de Stokes.

Resolução de (2):

(a) M é uma superfície esférica de raio 3 centrada na origem, cortada por dois planos verticais dados pelas equações $y=0$ e $y=2$.
Consideremos uma parametrização de M definida por:

$$g(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\sqrt{9-\rho^2},\rho\operatorname{sen}\theta),\qquad \rho\in]\sqrt{5},3[,\quad \theta\in]0,2\pi[.$$

A sua matriz Jacobiana é dada por

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{\rho}{\sqrt{9-\rho^2}} & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} D_\rho g \times D_\theta g &= \left(\cos\theta, -\frac{\rho}{\sqrt{9-\rho^2}}, \mathrm{sen}\,\theta\right) \times (-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, 0, \rho\cos\theta) \\ &= \left(-\frac{\rho^2}{\sqrt{9-\rho^2}}\cos\theta, -\rho, -\frac{\rho^2}{\sqrt{9-\rho^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta\right), \end{aligned}$$

tem o sentido da normal pretendida, com a terceira componente negativa no ponto $(2,1,2) = g(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Ainda,

$$\begin{aligned} F(g(\rho,\theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g) &= -\rho^3\cos^2\theta + \rho(9-\rho^2) - \rho^3\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= \rho(9-\rho^2) - \rho^3. \end{aligned}$$

Obtemos pois que o fluxo é dado por

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^3 F(g(\rho,\theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g)\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^3 \rho(9-\rho^2) - \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^3 9\rho - 2\rho^3\, d\rho\, d\theta = 2\pi\left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right]_{\sqrt{5}}^3 = -20\pi.$$

(b) Temos $\operatorname{div} F = y - 2y + y = 0$. Seja T_1 o disco no plano $y = 0$ de raio 3 e centrado na origem. Seja T_2 o disco no plano $y = 2$ de raio $\sqrt{5}$ e centrado no ponto $(0,2,0)$. Sejam n_1, n_2, n as normais unitárias a T_1, T_2 e M, respectivamente, exteriores ao volume D limitado por T_1, T_2 e M. Pelo Teorema da Divergência temos,

$$0 = \iiint_D \operatorname{div} F = \iint_M F \cdot n + \iint_{T_1} F \cdot n_1 + \iint_{T_2} F \cdot n_2.$$

Como:

- $n_1 = (0,-1,0)$ e $F \cdot n_1 = y^2 = 0$ em T_1. Logo:

$$\iint_{T_1} F \cdot n_1 = 0;$$

- $n_2 = (0,1,0)$ e $F \cdot n_2 = -y^2 = -4$ em T_1. Logo:

$$\iint_{T_2} F \cdot n_2 = -4(\text{área } T_2) = -20\pi;$$

Assim, obtemos

$$\iint_M F \cdot n = -\iint_{T_1} F \cdot n_1 - \iint_{T_2} F \cdot n_2 = 20\pi.$$

Note-se que este fluxo é segundo a normal exterior à fronteira de D. No entanto, o fluxo pedido é segundo a normal interior, logo o resultado deverá ser -20π, como o obtido na alínea (a).

(c) Sabemos que $\operatorname{div} F = 0$ e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$ logo existe um potencial vector H tal que $\operatorname{rot} H = F$. Para o determinar resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} = F_1 = yx \\ \\ \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = F_2 = -y^2 \\ \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = F_3 = yz. \end{cases}$$

Escolhendo $H_1 = 0$, obtemos da segunda e terceira equações $H_3 = xy^2 + \alpha(y,z)$, $H_2 = xyz + \beta(y,z)$. A primeira equação fica então $2xy + \frac{\partial \alpha}{\partial y} - xy - \frac{\partial \beta}{\partial z} = yx$ e pode ser resolvida tomando por exemplo $\alpha = 0$, $\beta = 0$. O potencial vector vai então ser $H(x,y,z) = (0, xyz, xy^2)$. Usando o Teorema de Stokes temos

$$\iint_M F \cdot n \, dS = \int_M \operatorname{rot} H \cdot n \, dS = \int_{\partial M} H \cdot dg,$$

onde g é um parametrização da fronteira de M, percorrida no sentido compatível com a orientação de M dada pela normal n. Temos $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ onde

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + z^2 = 9\,;\, y = 0\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + z^2 = 5\,;\, y = 2\},$$

e, usando a regra da mão direita, concluimos que Γ_1 deve ser percorrida no sentido directo e Γ_2 no sentido horário, quando observadas por exemplo do ponto $(0,-10,0)$. Assim, uma parametrização para Γ_1 é dada por

$$g_1(t) = (3\cos t, 0, 3 \operatorname{sen} t) \qquad 0 < t < 2\pi$$

e para Γ_2 é dada por

$$g_2(t) = (\sqrt{5}\cos t, 2, -\sqrt{5}\operatorname{sen} t) \qquad 0 < t < 2\pi.$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \iint_M F \cdot n \, dS &= \iint_{\partial M} H \cdot dg \\ &= \int_0^{2\pi} H(g_1(t)) \cdot g_1'(t) \, dt + \int_0^{2\pi} H(g_2(t)) \cdot g_2'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0,0,0) \cdot g_1'(t) \, dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, -10\cos t \operatorname{sen} t, 4\sqrt{5}\cos t) \cdot (-\sqrt{5}\operatorname{sen} t, 0, -\sqrt{5}\cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -20\cos^2 t \, dt = -20\left[\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -20\pi. \end{aligned}$$

(3) Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{|x|y \ \mathrm{sen}(x+y) \ e^{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}.$$

Mostre que f é integrável em D e indique, justificando, um majorante para $|\int_D f|$.

Resolução de (3):

A função f é contínua em $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e

$$|f| \leq \frac{|x| \, y \ e^{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

pelo que, se mostrarmos que a função $h : D \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y) = \frac{|x| \, y \ e^{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ é integrável, podemos concluir, pelo critério de comparação, que f é integrável em D.

Para mostrar que h é integrável vamos utilizar o Teorema da convergência monótona. Para tal, consideramos a sucessão de funções $\{h_k\}$ definidas por

$$h_k = \begin{cases} \dfrac{|x| \, y \, e^{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2} & \text{se } \dfrac{1}{k} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq k \\ \\ 0 & \text{c.c.}, \end{cases}$$

que são contínuas num compacto e zero fora dele pelo que são integráveis em $\mathbb{R}^2$ e consequentemente em D. Além disso, esta sucessão é monótona crescente (pois $h_k \geq 0$) e a sucessão dos integrais de h_k é limitada:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_D h_k &= \int_0^\pi \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{r^3 \, |\cos\theta| \sin\theta \, e^{1-r^2}}{r^2} \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k r \, e^{1-r^2} \left(\int_0^\pi |\cos\theta| \sin\theta \, d\theta \right) dr \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k r \, e^{1-r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, \sin\theta \, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos\theta \, \sin\theta \, d\theta \right) dr \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k r \, e^{1-r^2} \left(\left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) dr = \int_{\frac{1}{k}}^k r \, e^{1-r^2} \, dr \\ &= \left[-\frac{e^{1-r^2}}{2} \right]_{\frac{1}{k}}^k = \frac{1}{2} \left(e^{1-\frac{1}{k^2}} - e^{1-k^2} \right) \leq \frac{e}{2}; \end{aligned}$$

Conclui-se assim que $h = \lim_{k\to\infty} h_k$ é integrável em D e consequentemente f também. Além disso,

$$\int_D h = \lim_{k\to\infty} \int_D h_k.$$

Para encontrar um majorante de $\left|\int_D f\right|$, temos

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f| \leq \int_D h = \lim_{k\to\infty} \int_D h_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \left(e^{1-\frac{1}{k^2}} - e^{1-k^2} \right) = \frac{e}{2}.$$